UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS NATURAIS E EDUCAÇÃO
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
PET - MATEMÁTICA

VI CURSO DE NIVELAMENTO - MATEMÁTICA

UBERABA - MG
2019

Curso de Nivelamento de Matemática

O projeto de nivelamento em Matemática tem como objetivo proporcionar aos alunos ingressantes e para todos aqueles interessados em participar a oportunidade de amenizar a carência de conhecimentos em Matemática básica, buscando um melhor desempenho dos acadêmicos nas disciplinas de graduação, e assim colaborar para um processo de ensino e aprendizagem.

O curso de nivelamento será ministrado pelos alunos do PET-Matemática no início dos semestres letivos. Além disso, a ação da proposta também oportunizará uma vivência/experiência da prática docente aos petianos que será futuramente profissional da educação.

Sumário

1 Conjuntos

A ideia de **conjunto** é uma noção primitiva e aparece intuitivamente quando consideramos um agrupamento qualquer.

Um conjunto é formado por objetos, chamados de seus **elementos**.

Esses conjuntos podem ser representados por meio de um diagrama.

1.1 Relação entre objeto e conjunto

Se um objeto x goza das propriedades ou satisfaz as condições do conjunto A, dizemos então que x pertence a A. Usaremos a seguinte notação:

$$x \in A$$

Embora se, um objeto x não satisfaz as condições e/ou não goza das propriedades de A, dizemos então que x não pertence a A. Usaremos a seguinte notação:

$$x \notin A$$

Dado um conjunto $A = \{a|a$ é um numero natural multiplos de $3\}$.
$A = \{0, 3, 6, 9, ...\}$, o conjunto A é um exemplo de conjunto Infinito.

Dado um conjunto $B = \{b|b$ é divisor positivo de $6\}$.
$B = \{1, 2, 3, 6\}$, o conjunto B é um exemplo de conjunto Finito.

Dado um conjunto $C = \{c|c$ é um numero primo par$\}$.
$C = \{2\}$, o conjunto C é um exemplo de conjunto Unitário.

Dado um conjunto $D = \{d|d$ é um numero inteiro de $d^2 = 2\}$.
$D = \{\}$ ou $\varnothing$, o conjunto D é um exemplo de conjunto Vazio.

Um conjunto A é igual a um conjunto B, se, e somente se, tiverem os mesmos elementos.

Se em um conjunto A, todos os elementos pertencem também a um conjunto B, dizemos que A é um subconjunto de B, ou que A está contido em B. Usamos a seguinte notação:

$$A \subset B$$

Ou que B contém A:

$$B \supset A$$

1.2 Operações entre conjuntos

Dados os conjuntos A e B, definimos a união de A e B o conjunto formado pelos elementos de A ou de B. Denotamos a união de A e B por:

$$A \cup B$$

$$x \in (A \cup B) \Longrightarrow x \in A \textbf{ ou } x \in B$$

Dados os conjuntos A e B, definimos a intersecção de A e B o conjunto formado pelos elementos de A e de B. Denotamos a intersecção de A e B por:

$$A \cap B$$

$$x \in (A \cap B) \Longrightarrow x \in A \textbf{ e } x \in B$$

Dados os conjuntos A e B, definimos que a diferença de A e B, nessa ordem, é o conjunto formado pelos elementos que são elementos de A e não são elementos de B. Denotamos a diferença de A e B por:

$$A - B$$

$$x \in (A - B) \Longrightarrow x \in A \textbf{ e } x \notin B$$

a. **Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$):**

   Chama-se conjunto dos números naturais o conjunto formado pelos números $0, 1, 2, 3, ...$ com representação:

$$\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, ...$$

   Podemos destacar um subconjunto de $\mathbb{N}$ formado por todos os números naturais com exceção do zero, o qual indicamos por $\mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{N}^* = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...$$

   No conjunto dos números naturais são definidas duas operações: a adição e a multiplicação. Quaisquer que sejam os naturais a e b, sua soma $a + b$ e seu produto $a \cdot b$ são números naturais.

b. **Conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$):**

Esse conjunto é formado por todos os elementos de $\mathbb{N}$ e seus opostos (ou simétricos):

$$\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Como todos os números naturais também são números inteiros, temos que $\mathbb{N}$ é subconjunto de $\mathbb{Z}$, ou seja, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Podemos destacar outros subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

- Conjunto dos números inteiros não nulos:

$$\mathbb{Z}^* = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

- Conjunto dos números inteiros não negativos:

$$Z_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\} = \mathbb{N}$$

- Conjunto dos números inteiros positivos:

$$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\} = \mathbb{N}^*$$

- Conjunto dos números inteiros não positivos:

$$\mathbb{Z}_- = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$$

- Conjunto dos números inteiros negativos:

$$\mathbb{Z}_-^* = \{..., -5, -4, -3, -2, -1\}$$

No conjunto dos números inteiros são definidas três operações: a adição, subtração e a multiplicação. Quaisquer que sejam os inteiros a e b, sua soma $a+b$, sua diferença $a-b$ e seu produto $a \cdot b$ são números inteiros.

c. **Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$):**

Chama-se conjunto dos números racionais o conjunto das frações $\frac{a}{b}$, onde $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, para os quais adotam-se as seguintes definições:

i. Igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longrightarrow ad = bc$

ii. Adição: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

iii. Multiplicação: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

O conjunto dos números racionais também apresenta alguns subconjuntos notáveis: $\mathbb{Q}^*$,$\mathbb{Q}_+$,$\mathbb{Q}_+^*$,$\mathbb{Q}_-$ e $\mathbb{Q}_-^*$.

Notemos finalmente que todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um número decimal. Na passagem de uma notação para outra podem ocorrer dois casos:

I. O número decimal tem uma quantidade finita de algarismos, isto é, uma decimal exata.
Exemplos: $\frac{3}{1} = 3$; $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{1}{20} = 0.05$; $\frac{27}{1000} = 0.027$

II. O número decimal tem uma quantidade infinita de algarismos que se repetem periodicamente, isto é, é uma dízima periódica.
Exemplos: $\frac{1}{3} = 0.3333...$; $\frac{2}{7} = 0,285714285714...$

d. **Conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I}$):**

Um número cuja representação decimal infinita não é periódica é chamado de número irracional. Indicamos o conjunto dos números irracionais por $\mathbb{I}$.
Exemplos:

- O número $0,123456...$ não é uma dízima periódica, pois os infinitos algarismos à direita da vírgula não se repetem periodicamente.
- Os números $\sqrt{2} = 1,4142135...$, $\sqrt{3} = 1,7320508...$, $e = 2,7182818...$ e $\pi = 3,141592...$ não são dízimas periódicas.

e. **Conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$):**

Esse conjunto é formado pelos números racionais e pelos números irracionais, ou seja, as decimais exatas ou periódicas e as decimais não exatas e não periódicas, e é representado por $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Por outro lado, se um número real é racional, ele não é irracional; e se um número real é irracional, ele não é racional.

Existem subconjuntos de $\mathbb{R}$ importantes:

- Conjunto dos números reais não nulos:

$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$$

- Conjunto dos números reais não negativos:

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$$

- Conjunto dos números reais positivos:

$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$$

- Conjunto dos números reais não positivos:

$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$$

- Conjunto dos números reais negativos:

$$\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$$

2 Potenciação

Potenciação é uma multiplicação de fatores iguais sucessivamente.

$$a^n = c$$

Onde **a** é a base, **n** o expoente e **c** a potência.
Exemplo: $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
Temos que 4 é a base, 3 o expoente e 64 a potência.

Definições:

- Todo número elevado à zero é igual a um.

$$a^0 = 1$$

  Exemplo: $3^0 = 1$

- Potência com expoente 1.

$$a^1 = a$$

Exemplo: $5^1 = 5$

- Toda potência de base 1 é igual ao próprio 1.

$$1^n = 1, \forall n \in \mathbb{R}$$

Exemplo: $1^7 = 1$

- Potências com base igual a 0.

$$0^n = 0$$

Exemplo: $0^{14} = 0$

Propriedades da Potenciação:

- Multiplicação de potências de mesma base.

Em uma multiplicação de potências com a mesma base, conservamos a base e somamos os expoentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Exemplo:

$$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$$

- Divisão de potências de mesma base

Em uma divisão de potências com a mesma base, conservamos a base e subtraímos os expoentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \forall a \neq 0$$

Exemplo:

$$\frac{4^5}{4^2} = 4^{5-2} = 4^3$$

- Potência com expoente negativo

  Nas potências com expoente negativo, devemos inverter a base e inverter o sinal do expoente:
  $$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$
  Exemplo:
  $$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- Potência de uma divisão

  A divisão de dois fatores elevados a um dado expoente é igual a divisão desses fatores, cada um elevado ao mesmo expoente.
  $$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$
  Exemplo:
  $$\left(\frac{7}{5}\right)^3 = \frac{7^3}{5^3}$$

- Potência de potência

  Para elevar uma potência a um novo expoente, devemos conservar a base e multiplicar os expoentes.
  $$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$
  Exemplo:
  $$(2^2)^4 = 2^{2 \cdot 4} = 2^8$$

- Potência com base negativa

  Temos as seguintes situações:

  – $-a^m$
  – $(-a)^m$

  O sinal de negativo $(-)$ na frente da base só fará parte da potenciação quando estiver dentro de um parêntese, caso contrário, ele continua no seu lugar no resultado.
  Exemplos:
  $$-3^2 = -9 \text{ e } (-3)^2 = 9$$

3 Radiciação

Propriedades das raízes

1ª Propriedade: Quando o radicando for uma potência de base maior que ou igual a zero e expoente igual ao índice do radical, a raiz será igual à base da potência no radicando.

$$\sqrt[n]{a^n}$$

Essa propriedade também é válida quando

$$a < 0$$

e n é um número ímpar maior que 1.
Exemplos:

$$\sqrt[7]{3^7} = 3^{\frac{7}{7}} = 3^1 = 3$$

$$\sqrt[3]{(-2)^3} = (-2)^{\frac{3}{3}} = (-2)^1 = 2$$

Se a base for negativa e o índice for par não é válida, por exemplo:

$$\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = 2$$

$$\sqrt[4]{(-2)^4} \neq -2$$

2ª Propriedade: Quando multiplicamos o índice do radical e o expoente do radicando por um número natural diferente de zero, obtemos um radical equivalente ao inicial.

Quando dividimos o índice do radical e o expoente do radicando por um número natural diferente de zero, divisor de ambos, também obtemos um radical equivalente ao inicial.

Exemplos:

$$\sqrt[3]{5^7} = 5^{\frac{7}{3}} = 5^{\frac{7\cdot 2}{3\cdot 2}} = \sqrt[3\cdot 2]{5^{7\cdot 2}} = \sqrt[6]{5^{14}}$$

$$\sqrt[9]{2^6} = 2^{\frac{6}{9}} = 2^{\frac{6:3}{9:3}} = \sqrt[9:3]{2^{6:3}} = \sqrt[3]{2^2}$$

3ª Propriedade: A raiz de um produto é igual ao produto das raízes de seus fatores, e a raiz de um quociente é igual ao quociente das raízes do dividendo e do divisor.
Exemplos:

$$\sqrt[5]{24} = \sqrt[5]{8 \cdot 3} = (8 \cdot 3)^{\frac{1}{5}} = 8^{\frac{1}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{3}$$

$$\sqrt[6]{\frac{7}{4}} = \left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{1}{6}} = \frac{7^{\frac{1}{6}}}{4^{\frac{1}{6}}} = \frac{\sqrt[6]{7}}{\sqrt[6]{4}}$$

4ª Propriedade: A raiz de uma raiz pode ser representada por um único radical, em que o índice é igual ao produto dos índices das raízes iniciais.
Exemplos:

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{6}} = \left(\sqrt[3]{6}\right)^{\frac{1}{4}} = (6^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}} = 6^{\frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 4}} = 6^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{6}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt{4}} = \left(\sqrt{4}\right)^{\frac{1}{5}} = (4^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{5}} = 4^{\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 5}} = 4^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{4}$$

Propriedades da radiciação Se $a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}_+, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$ e $p \in \mathbb{N}^*$:

- $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$
- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ para qualquer b diferente de 0.
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$

4 Equações de 1º grau

Equação é toda sentença matemática aberta que exprime uma relação de igualdade. A palavra equação tem o prefixo "équa", que em latim quer dizer "igual".
Exemplos:

a) $x + 1 = 0$

b) $2x + 7 = 18$

c) $4x + 1 = 3x - 9$

d) $3a - b - c = 0$

Não são equações:

a) $4+8=7+5$ (Não é uma setença aberta)

b) $x-5<3$ (Não é igualdade)

c) $5\neq -2$ (Não é sentença aberta, nem igualdade)

Definição: Equação do 1º grau na incógnita x é toda equação que pode ser escrita na forma $ax=b$, sendo a e b números reais, com a diferente de zero.

$$\text{Equação geral: } ax+b=0$$

onde a e b são números conhecidos e a diferente de 0,
$a \Rightarrow$ coeficiente da variável
$b \Rightarrow$ termo independente
$x \Rightarrow$ valor desconhecido.

Se resolve de maneira simples: subtraindo b dos dois lados, obtemos:
$ax=-b$, dividindo agora por a (dos dois lados), temos: $x=-\frac{b}{a}$.

Na equação de 1º grau tudo que antecede o sinal da igualdade denomina-se *1º membro*, e o que sucede, *2º membro*.

Considere a equação $2x-8=3x-10$

$$\underbrace{2x-8}_{1^{\text{o}}\text{ membro}} = \underbrace{3x-10}_{2^{\text{o}}\text{ membro}}$$

$$\underbrace{2x}-\underbrace{8}=\underbrace{3x}-\underbrace{10}$$

Termos da equação

Uma equação do 1º grau pode ser vista como uma balança com dois pratos em equilíbrio em que cada prato representa um membro da mesma, portanto, tudo o que fazemos de lado da equação devemos fazer do outro para não alterar tal equilíbrio.

Discussão da Equação do 1º Grau

1º Caso: Equações possíveis e determinadas: São as equações que admitem um número finito de soluções que, neste caso, por ser uma equação do 1º grau só admite uma única solução.

Exemplo: $x-2(x+1)=-3$

2º Caso: Equações possíveis e indeterminadas: São equações que admitem infinitas soluções, ou seja, um número infinito de soluções. Também denominada de identidades. Seu conjunto verdade é representado pelos números reais.

Exemplo: $5x - 2y = 74$

3º Caso: Equações impossíveis: São todas as equações que não admitem soluções. Seu conjunto solução é o conjunto vazio.

Exemplo: $x + 2 = x - 5$

5 Produtos notáveis

Na resolução de diversos problemas de matemática, é comum o aparecimento de expressões do tipo $(x+3)^2$, $(2-p)^3$ ou $(3x+\sqrt[3]{4})^2$. Devido à grande frequência com a qual esses termos aparecem no cálculo algébrico, eles são denominados **Produtos Notáveis**. O desenvolvimento destas expressões pode ser realizado simplesmente levando-se em conta o conceito de potenciação e aplicando a distributiva. Observe como exemplo o desenvolvimento de $(x?5)^2$:

$$(x-5)^2 = (x-5)(x-5) = x^2 - 5x - 5x + 25$$

$$(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$$

No entanto, como resultado do **Produto Notável** apresenta sempre o mesmo formato, existem algumas regras práticas que podem ser adotadas para desenvolver esses produtos. Essas regras são apresentadas a seguir.

a) Quadrado da soma de dois termos:

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

b) Quadrado da diferença de dois termos:

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

c) Produto da soma pela diferença de dois termos:

$$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$$

d) Cubo da soma de dois termos:

$$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$$

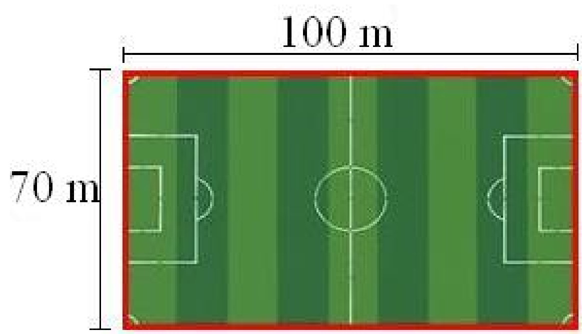
e) Cubo da diferença de dois termos:

$$(x-a)^3 = x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3$$

6 Cálculo de perímetro, área e volume

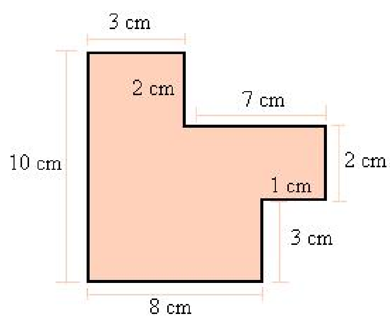
6.1 Perímetro

Perímetro é a medida do comprimento de um contorno. Observe um campo de futebol, o perímetro dele é o seu contorno que está de vermelho. Para fazermos o cálculo do perímetro devemos somar todos os seus lados:



$$P = 100 + 70 + 100 + 70$$
$$P = 340m$$

Outro exemplo:



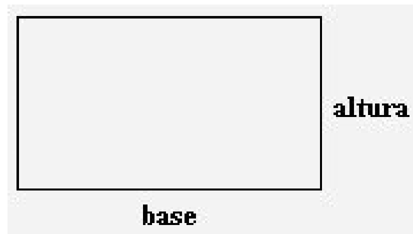
O perímetro da figura é a soma de todos os seus lados:

$$P = 10 + 8 + 3 + 1 + 2 + 7 + 2 + 3$$
$$P = 18 + 4 + 9 + 5$$
$$P = 22 + 14$$
$$P = 36$$

A unidade de medida utilizada no cálculo do perímetro é a mesma unidade de medida de comprimento: metro, centímetro, quilômetro...

6.2 Área

A Área é a região plana interna delimitada pelos lados de um polígono. Tal conceito é amplamente usado no dia-a-dia, como na medição de um terreno, na delimitação de um espaço, entre outros.



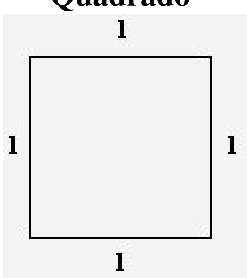
O valor da área de um polígono varia de acordo com seu formato. Cada polígono tem uma forma peculiar para calcular sua área. Exemplificaremos alguns conhecidos, tais como: retângulo, quadrado, triângulo e círculo.

Retângulo

Já sabemos que o retângulo possui dois lados iguais chamados de base e outros dois lados iguais chamados de altura. Para sabermos o valor da área de um retângulo (A), devemos multiplicar a medida da base (b) pela medida da altura (h).

$$A = b \cdot h$$

Quadrado

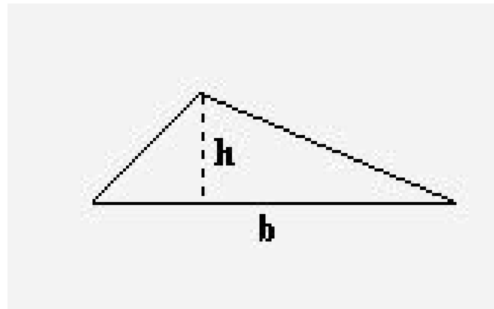


No quadrado, podemos aplicar o mesmo raciocínio usado para calcular a área do retângulo, multiplicando a medida da base pela medida da altura, mas, como no quadrado a medida de todos os lados é igual (l):,

$$A = l \cdot l \text{ ou } A = l^2$$

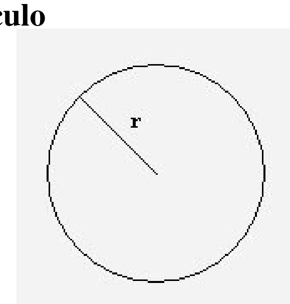
Triângulo

No caso do triângulo, pode-se notar que ele é exatamente metade de um retângulo, portanto, em um retângulo cabem dois triângulos, ambos de mesma área. Por conseguinte, a área do triângulo é metade da área do retângulo, ou seja:



$$A = b \cdot \frac{h}{2}$$

Círculo



Considere um círculo de raio r. A área de um círculo é dada pelo quadrado de seu raio multiplicado por π.

$$A = (\pi) \cdot r^2$$

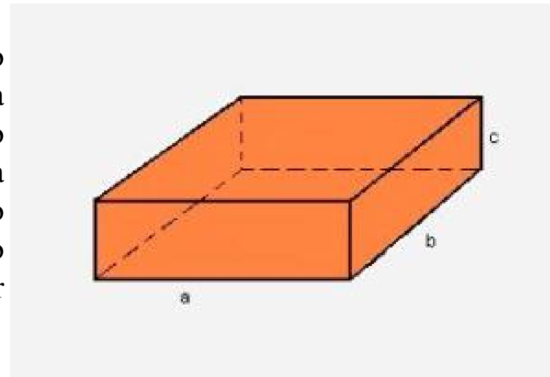
6.3 Volume

Volume de um sólido é a quantidade de espaço que esse sólido ocupa. Nesse cálculo, temos que ressaltar as três dimensões do sólido, observando o seu formato. O entendimento de volume é usado, mesmo que intuitivamente, em nossas ações no dia-a-dia, por exemplo: antes de estacionar um carro, calculamos mentalmente o espaço do carro e verificamos se tal espaço é compatível com as dimensões do carro, ao instalar uma TV em um móvel, conferimos, primeiro, se o espaço disponível pode comportar a TV, entre outros exemplos.

Assim como no cálculo da área, o cálculo do volume de um sólido depende do formato do sólido. Mas, de forma geral, o volume de um sólido geométrico é calculado a partir do produto de sua base por sua altura. Por enquanto, calcularemos o volume de alguns sólidos, como: o paralelepípedo retângulo, o cubo e o cilindro.

Paralelepípedo Retângulo

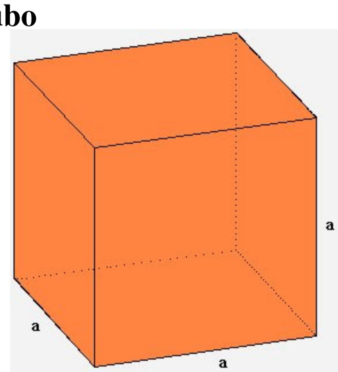
O paralelepípedo retângulo é um sólido cujas seis faces são retângulos. Para calcular o volume do paralelepípedo retângulo é necessário fazer o produto da área de sua base pela altura. Mas, como a base do paralelepípedo retângulo tem o formato retangular, exprimimos o valor de sua área por $b \cdot c$.



Portanto, se multiplicarmos o valor da área da base pela altura (a) do paralelepípedo retângulo, acharemos o valor do volume (V) desse sólido:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Cubo



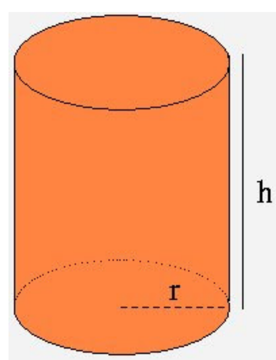
O cubo é um sólido geométrico cujas seis faces são quadrados de mesmo lado. Para calcular o volume do cubo é necessário fazer o produto da área de sua base pela altura. Mas, como a base do cubo é um quadrado de lado a, o valor de sua área é, então, definido pelo lado ao quadrado (a^2).

Sendo assim, se multiplicarmos o valor da área da base pela altura (a) do cubo, acharemos o valor do volume (V) desse sólido:

$$V = a \cdot a \cdot a \text{ ou } V = a^3$$

Cilindro

O Cilindro é um sólido geométrico que pode ser entendido como um círculo prolongado até uma altura h. O cilindro possui duas faces iguais e de formato circular. Para calcular o volume do cilindro, deve-se fazer o produto da área de sua base pela altura.



No caso do cilindro, sua base é um círculo, portanto a área de sua base é igual a $(\pi)\cdot r^2$. Multiplicando esse valor pela altura (h) do cilindro, achamos o seu volume (V):

$$V = (\pi)\cdot r^2 \cdot h$$

7 Regra de Três Simples

Regra de três simples é um processo prático para resolver problemas que envolvam quatro valores dos quais conhecemos três deles. Devemos, portanto, determinar um valor a partir dos três já conhecidos. Passos utilizados numa regra de três simples:

1) Construir uma tabela, agrupando as grandezas da mesma espécie em colunas e mantendo na mesma linha as grandezas de espécies diferentes em correspondência.

2) Identificar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais.

3) Montar a proporção e resolver a equação.

Exemplos:

1) Com uma área de absorção de raios solares de $1,2m^2$, uma lancha com motor movido a energia solar consegue produzir 400 watts por hora de energia. Aumentando-se essa área para $1,5m^2$, qual será a energia produzida?

   Solução: montando a tabela

Área (m^2)	Energia (Wh)
$1,2$	400
$1,5$	x

   Identificação do tipo de relação:

Área	Energia $\Downarrow$
$1,2$	400
$1,5$	x

   Inicialmente colocamos uma seta para baixo na coluna que contém o x (2ª coluna). Observe que: Aumentando a área de absorção, a energia solar aumenta.

Como as palavras correspondem (aumentando - aumenta), podemos afirmar que as grandezas são diretamente proporcionais. Assim sendo, colocamos uma outra seta no mesmo sentido (para baixo) na 1ª coluna. Montando a proporção e resolvendo a equação temos:

Área $\Downarrow$	Energia $\Downarrow$
$1,2$	400
$1,5$	x

$$\begin{aligned} \frac{1,2}{1,5} &= \frac{400}{x} \\ 1,2x &= 1,5 \cdot 400 \\ x &= \frac{600}{1,2} \\ x &= 500 \end{aligned}$$

Logo, a energia produzida será de 500 watts por hora.

2) Um trem, deslocando-se a uma velocidade média de 400Km/h, faz um determinado percurso em 3 horas. Em quanto tempo faria esse mesmo percurso, se a velocidade utilizada fosse de 480km/h?

Solução: montando a tabela

Velocidade (Km/h)	Tempo (h)
400	3
480	x

Identificação do tipo de relação:

Velocidade	Tempo $\Downarrow$
400	3
480	x

Inicialmente colocamos uma seta para baixo na coluna que contém o x (2ª coluna). Observe que: Aumentando a velocidade, o tempo do percurso diminui.

Como as palavras são contrárias (aumentando - diminui), podemos afirmar que as grandezas são inversamente proporcionais. Assim sendo, colocamos

Velocidade $\Uparrow$	Tempo $\Downarrow$
400	3
480	x

uma outra seta no sentido contrário (para cima) na 1ª coluna. Montando a proporção e resolvendo a equação temos:

$$\begin{aligned} \frac{3}{x} &= \frac{480}{400} \\ 480x &= 3 \cdot 400 \\ x &= \frac{1200}{480} \\ x &= 2,5 \end{aligned}$$

Logo, o tempo desse percurso seria de $2,5$ horas ou 2 horas e 30 minutos.

8 Regra de Três Composta

A regra de três é classificada como composta quando o problema apresentado envolve mais de duas grandezas, com isso utilizando das proporções obtemos o valor que falta a partir dos outros que já foram determinados. Três passos para resolver uma regra de três composta:

1º) Construir uma tabela, agrupando as grandezas da mesma espécie em colunas e mantendo na mesma linha as grandezas de espécies diferentes em correspondência.

2º) Isolar a grandeza cujo valor é desconhecido. E em seguida relacionar as outras grandezas com a isolada, uma de cada vez, classificando quanto a proporcionalidade (diretamente ou inversamente).

3º) Para montar a equação igualamos o valor desconhecido da grandeza destacada com os valores das outras grandezas, se for diretamente proporcional mantemos a fração inicial, se for inversamente proporcional invertemos os valores da fração, o lado da equação que contém os valores das frações conhecidos deve ter as frações multiplicadas.

Exemplo 1: Para pintar um muro de 12 metros de comprimento e 3 metros de altura são gastos 4 baldes de tinta. Quantos baldes de tinta serão necessários para pintar um muro de 18 metros de comprimento e 5 metros de altura?

Solução: Vamos construir uma tabela, relacionando cada valor a sua respectiva grandeza, começando pela última linha e, em seguida, na linha acima

Comprimento (muro)	Altura (muro)	Baldes de tinta
18	5	X
12	3	4

As grandezas *comprimento* e *baldes de tinta* são diretamente proporcionais.
As grandezas *altura* e *baldes de tinta* são diretamente proporcionais.
Então montando a equação temos:

$$\frac{X}{4} = \frac{18}{12} * \frac{5}{3} \Longrightarrow X = 4 * \frac{90}{36} \Longrightarrow X = 10$$

Resposta: 10 baldes de tinta

Exemplo 2: Doze pedreiros fizeram 6 barracões em 30 dias, trabalhando 6 horas por dia. Calcule o número de horas por dia que deverão trabalhar 18 pedreiros para fazer 10 barracões em 25 dias.

Solução: Para construir a tabela colocamos cada valor em sua respectiva grandeza, começando pela última linha e, em seguida, na linha acima.

n^{o} de pedreiros	n^{o} de barracões	Tempo (dias)	Horas/dia
18	10	25	X
12	6	30	6

Relacionamos as grandezas de acordo com a proporcionalidade:
As grandezas *número de pedreiros* e *horas/dia* são inversamente proporcionais.
As grandezas *número de barracões* e *horas/dia* são diretamente proporcionais.
As grandezas *tempo (dias)* e *horas/dia* são inversamente proporcionais.
E montamos a equação:

$$\text{Temos: } \frac{X}{6} = \frac{12}{18} * \frac{10}{6} * \frac{30}{25} \Longrightarrow X = 6 * \frac{3600}{2700} \Longrightarrow X = 8$$

Resposta: 8 horas/dia.

Exemplo 3: Uma casa é construída em 6 dias por 20 operários, que trabalham 9 horas por dia. Em quantos dias 12 operários, trabalhando 5 horas por dia, poderiam fazer a mesma casa?

Solução:

Operários	Horas	Dias
12	5	X
20	9	6

Relacionamos as grandezas de acordo com a proporcionalidade:
As grandezas *dias* e *operários* são inversamente proporcionais.
As grandezas *dias* e *horas* são inversamente proporcionais.
E montamos a equação:

$$\text{Temos: } \frac{X}{6} = \frac{20}{12} * \frac{9}{5} \Longrightarrow X = 6 * \frac{180}{60} \Longrightarrow X = 18 \text{ dias}$$

Resposta: 18 dias

9 Sistema de Equações Lineares

Documentos históricos demonstram que civilizações como a babilônica e a chinesa já trabalhavam com equações lineares.

A palavra Sistema vem do grego *systema* (*sy* significa “junto” e *sta*, “permanecer”), portanto sistema na matemática é o conjunto de equações que devem ser resolvidas ao mesmo tempo, ou seja, os resultados devem satisfazê-las simultaneamente.

O Sistema Linear é aplicado para resolver problemas como na distribuição de energia elétrica, no gerenciamento das linhas de telecomunicações, na logística para transporte de mercadorias em uma região e equações químicas.

Equações Lineares

As equações que formam o sistema são aquelas cujas incógnitas são elevadas ao expoente 1. Como exemplo:

Seja $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ incógnitas cujo o expoente é 1, as equações do tipo $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b$, são equações lineares e os termos $a_{11}, a_{12}, a_{13}, ..., a_{(1n)}$ são todos números reais, chamados coeficientes e b é o termo independente da equação.

Então teremos que as equações abaixo são lineares:

a) $3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 = 5$

b) $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$

c) $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 4$

d) $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$

A seguir temos exemplo de equações que **não** são lineares:

a) $2x_1^2 + 4x_2 + x_3 = 0$

b) $2x_1x_2 + x_3 + x_4 = 3$

c) $x_1 + \sqrt{x_2} - x_3 = 4$

Sistema de Equações Lineares

Entendemos que um Sistema Linear $m \times n$ é o conjunto composto por m equações lineares e n incógnitas, podendo ser representado como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Exemplos:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + 3y = 10 \end{cases}$ é um sistema linear 2×2 (2 equações e 2 incógnitas);

b) $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x - y - z = -1 \\ x - y + z = 8 \end{cases}$ é um sistema linear 3×3 (3 equações e 3 incógnitas);

c) $\begin{cases} x + 4y - 2z = 1 \\ 3x - y + z = 6 \end{cases}$ é um sistema linear 2×3 (2 equações e 3 incógnitas).

Solução de um Sistema Linear

Dizemos que $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ é solução de um sistema lineares quando os valores $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ satisfazer simultaneamente todas as equações do sistema. Para obter os valores da solução de um sistema utilizamos alguns métodos como os abaixo:

Método da Adição

Consiste em somarmos as variáveis semelhantes das duas equações no intuito de obter resultado igual à zero. Veja a resolução do sistema a seguir:

$$\begin{cases} x + 2y = 17 \\ x - 2y = -11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 17 \\ \underline{x - 2y = -11} \end{cases}$$

$2x - 0y = 6$
$2x = 6$
$x = 3$

Substituindo, $x = 3$
$x + 2y = 17$
$3 + 2y = 17$
$2y = 17 - 3$
$2y = 14$
$y = 7$

Método da Substituição

O método da substituição consiste em trabalhar qualquer equação do sistema de forma a isolar uma das incógnitas, substituindo o valor isolado na outra equação. Observe passo a passo a resolução do sistema a seguir:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ x - y = -3 \end{cases}$$

Nesse caso, vamos escolher a 2º equação e isolar a incógnita x.

$$x - y = -3$$

$$x = 3 - y$$

Agora, substituímos o valor de x por $-3 + y$ na 1º equação:

$$2x + 3y = 19$$

$$2 \cdot (-3 + y) + 3y = 19$$

$$-6 + 2y + 3y = 19$$

$$2y+3y=19+6$$
$$5y=25$$
$$y=\frac{25}{5}$$
$$y=5$$

Para finalizar, calculamos o valor de x utilizando a seguinte equação:

$$x=-3+y$$
$$x=-3+5$$
$$x=2$$

Portanto, a solução do sistema é $x=2$ e $y=5$, isto é, o par ordenado $(2,5)$.
Vamos resolver o sistema a seguir:

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=4 \end{cases}$$

Nesse caso, vamos escolher a 1^{o} equação e isolar a incógnita x.

$$x+y=10$$
$$x=10-y$$

Agora, substituímos o valor de x por $10-y$ na 2^{o} equação:

$$x-y=4$$
$$(10-y)-y=4$$
$$10-2y=4$$
$$2y=6$$
$$y=\frac{6}{2}$$
$$y=3$$

Para finalizar, calculamos o valor de x utilizando a seguinte equação:

$$x=10-y$$
$$x=10-3$$
$$x=7$$

Portanto, a solução do sistema é $x = 7$ e $y = 3$, isto é, o par ordenado $(7,3)$.

Método do Escalonamento

Um sistema de equações lineares é dito escalonado quando:

1. Todas as equações apresentam as incógnitas em uma mesma ordem;
2. O número de coeficientes nulos que precedem o primeiro não nulo de cada equação aumenta de uma equação para outra.

Exemplos:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 4z & = & 0 \\ & & 2y & - & 3z & = & 8 \\ & & & & 5z & = & 10 \end{array}$$

Quando escalonamos um sistema fica mais fácil resolvê-lo.
Vamos escalonar e resolver o sistema abaixo.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x-2y-z=4 \\ 2x-2y+z=1 \end{cases}$$

Mantemos a 1ª equação.
Substituímos a 2ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -3.
Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -2.
Conseguimos assim eliminar o termo x nas duas últimas equações.

$$\begin{cases} x+y+z=2[\cdot(-3)+\text{ linha 2 }]\text{ e }[\cdot(-2)+\text{ linha 3}] \\ 3x-2y-z=4 \\ 2x-2y+z=1 \end{cases} = \begin{cases} x+y+z=2 \\ -5y-4z=-2 \\ -4y-z=-3 \end{cases}$$

Nesse novo sistema mantemos as duas primeiras equações.
Para anular o coeficiente de y na 3ª equação, vamos;

1. Multiplicar a 2ª equação por -4;
2. Multiplicar a 3ª por 5.
3. Somar essas duas equações, obtendo assim a nova terceira equação.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ -5y-4z=-2\cdot(-4) \\ -4y-z=-3\cdot(5) \end{cases} = \begin{cases} x+y+z=2 \\ -5y-4z=-2 \\ 11z=-7 \end{cases}$$

Como o sistema obtido é o escalonado podemos resolve-lo.

$$11z=-7 \Longrightarrow z=-\tfrac{7}{11}$$

Substituindo o valor encontrado na segunda equação temos:

$$-5y-4\cdot(-\frac{7}{11})=-2$$

$$-5y=-2-\frac{28}{11} \Longrightarrow y=\frac{10}{11}$$

Substituindo y e z na primeira equação encontramos:

$$x+\frac{10}{11}+(-\frac{7}{11})=2$$

$$x=2-\frac{3}{11} \Longrightarrow x=\frac{19}{11}$$

Portanto, o conjunto solução é: $\{(\frac{19}{11},\frac{10}{11},-\frac{7}{11})\}$.

10 Matrizes

10.1 Definição

Dados dois números m e n naturais e não nulos, chama-se matriz m por n (indica-se $m\times n$) toda tabela M formada por números reais distribuídos em m linhas e n colunas. Em uma matriz qualquer M, cada elemento é indicado por a_{ij}.

O índice i indica a linha e o índice j a coluna às quais o elemento pertence. Com a convenção de que as linhas sejam numeradas de cima par baixo (de 1 até m) e as colunas, da esquerda para a direita (de 1 até n), uma matriz $m\times n$ é representada por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

10.1.1 Exemplos:

1. A matriz $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & \frac{4}{5} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ é uma matriz 2×3.

2. A matriz $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ é uma matriz 3×1.

3. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz 3×3.

4. A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2×2.

10.1.2 Matrizes Especiais

Chamamos de **matriz linha** toda matriz que possui apenas uma linha ($1 \times n$).
Chamamos de **matriz coluna** toda matriz que possui apenas uma coluna ($m \times 1$).
Chamamos de **matriz quadrada** toda matriz na qual o número de linhas é igual ao de colunas ($n \times n$).
Chamamos de **matriz nula** toda matriz na qual todos os elementos são iguais a 0.
Chamamos de **matriz diagonal** toda matriz quadrada na qual, exceto pela diagonal principal, todos os elementos são 0.
Chamamos de **matriz identidade** toda matriz diagonal na qual todos os elementos da diagonal são 1.

10.2 Igualdade

Duas matrizes $A = a(_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ são iguais se, e somente se, $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i \in \{1,2,...,m\}$ e todo $j \in \{1,2,...,n\}$. Ou seja, são iguais caso sejam do mesmo tipo e apresentem todos os elementos correspondentes (elementos com índices iguais) iguais.

10.2.1 Exemplos:

1. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$ pois $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$ e $a_{22} = b_{22}$.

2. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ pois $a_{12} \neq b_{12}$, e $a_{21} \neq b_{21}$.

10.3 Adição

A soma de duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ resulta numa matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $i \in \{1,2,...,m\}$ e todo $j \in \{1,2,...n\}$. Isto significa que a soma de duas matrizess A e B (que só é possível caso estas sejam do mesmo tipo) é uma matriz C do mesmo tipo em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e B.

10.3.1 Exemplos:

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 & 2-1 & 3+1 \\ 4-4 & 5+0 & 6-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+0 & 8+1 \\ 9+2 & 9+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$

10.3.2 Propriedades da Adição de Matrizes

A adição de matrizes do tipo $m \times n$ possui as seguintes propriedades:

I. Associativa: $(A+B)+C = A+(B+C)$ quaisquer que sejam A, B e C do tipo $m \times n$.

II. Comutativa: $A+B = B+A$ quaisquer que sejam A e B do tipo $m \times n$.

III. Elemento neutro: $\exists M$ tal que $A+M = A$, qualquer que seja A do tipo $m \times n$ e M é a matriz nula.

IV. Simétrico: $\exists A'$ tal que $A+A' = M$, qualquer que seja A do tipo $m \times n$.

A subtração é definida da mesma forma que a adição.

10.4 Produto de um número por matriz

Dados um número $k \in \mathbb{R}$ e uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, seu produto é uma matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$ na qual $b_{ij} = k \cdot (a_{ij})$, $\forall i \in \{1,2,...,m\}$ e $\forall j \in \{1,2,...,n\}$. Logo, uma matriz A multiplicada por um número k resulta numa matriz B formada pelos elementos de A multiplicados por k.

10.4.1 Exemplos:

1. $3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 21 & 6 \\ 15 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

2. $\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 8 & 6 & 4 \\ 10 & 12 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

10.4.2 Propriedades do produto de um número por matriz

O produto de um número por uma matriz possui as seguintes propriedades:

I. Associativa: $a \cdot (b \cdot A) = (ab) \cdot A$

II. Distributiva: $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$

III. Distributiva: $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$

IV. Elemento neutro: $1 \cdot A = A$
onde $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$ são matrizes quaisquer e $a, b \in \mathbb{R}$.

10.5 Produto de matrizes

Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jk})_{n\times p}$ duas matrizes quaisquer, e seja P seu produto. Esse produto só existe caso o número de colunas de A seja igual ao número de linhas de B, e será uma matriz de m linhas e p colunas, isto é, $P = (p_{ik})_{m\times p}$, tal que:

$$p_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + ... + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$$

para todo $i \in \{1,2,...,m\}$ e todo $k \in \{1,2,...,p\}$. Logo:

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = P$$

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + ... + a_{1n} \cdot b_{n1} & \cdots & a_{11} \cdot b_{1p} + a_{12} \cdot b_{2p} + ... + a_{1n} \cdot b_{np} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + ... + a_{2n} \cdot b_{n1} & \cdots & a_{21} \cdot b_{1p} + a_{22} \cdot b_{2p} + ... + a_{2n} \cdot b_{np} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + a_{m2} \cdot b_{21} + ... + a_{mn} \cdot b_{n1} & \cdots & a_{m1} \cdot b_{1p} + a_{m2} \cdot b_{2p} + ... + a_{mn} \cdot b_{np} \end{bmatrix}$$

10.5.1 Exemplos:

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$. Como o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, o produto P existe e é uma matriz 2×1. Então:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Linha 1 de } A \cdot \text{Coluna 1 de } B \\ \text{Linha 2 de } A \cdot \text{Coluna 1 de } B \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 + 16 + 27 \\ 28 + 40 + 54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 122 \end{bmatrix}$$

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$. Como o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, o produto P existe e é uma matriz 2×3. Sejam L_1, L_2 as linhas 1 e 2 de A, respectivamente; sejam C_1, C_2, C_3 as colunas 1, 2 e 3 de B, respectivamente. Então:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \text{ de } A \cdot C_1 \text{ de } B & L_1 \text{ de } A \cdot C_2 \text{ de } B & L_1 \text{ de } A \cdot C_3 \text{ de } B \\ L_2 \text{ de } A \cdot C_1 \text{ de } B & L_2 \text{ de } A \cdot C_2 \text{ de } B & L_2 \text{ de } A \cdot C_3 \text{ de } B \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 9 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 10 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 8 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 9 & 3 \cdot 7 + 4 \cdot 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 24 & 27 \\ 47 & 54 & 61 \end{bmatrix}$$

10.5.2 Propriedades da Multiplicação de Matrizes

A multiplicação de matrizes do tipo $m \times n$ posusui as seguintes propriedades:

I. $AB \neq BA$

II. Associativa: $(AB)C = A(BC)$.

III. Distributiva: $A(B+C) = AB + AC$.

IV. Distributiva: $(A+B)C = AC + BC$.

V. Elemento neutro: $IA = A$, sendo I a matriz identidade.

10.6 Matriz Transposta

Seja $A = (a_{ij})_{m\times n}$ uma matriz qualquer. Chama-se **transposta** de A a matriz $A^T = (a'_{ji})_{m\times n}$, tal que $a'_{ji} = a_{ij}$, para todo i e todo j. Podemos concluir então que $a_{11} = a'_{11}, a_{12} = a'_{21}, a_{13} = a'_{31}, ..., a_{1n} = a'_{n1}$ e assim por diante. Isto significa que a 1ª linha de A equivale a 1ª coluna de A^T e assim por diante.

Exemplos:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 34 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 13 \\ 1 & 5 & 21 \\ 2 & 8 & 34 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

11 Equações de 2º Grau

Equação do 2º grau na incógnita x é toda equação que pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais que exercem a função de coeficientes da equação, com $a \neq 0$.

A igualdade $ax^2 + bx + c = 0$, é chamada de **forma reduzida** de uma equação do 2° graus. As letras a,b e c são os **coeficientes**: a é o coeficiente de x^2, b é o coeficiente de x e c é o coeficiente independente ou termo independente. Veja alguns exemplos de equações do 2° grau e seus coeficientes:

Equações do 2° grau do tipo $ax^2+bx+c=0$ em que a, b e c são números reais diferentes de zero, são **equações do 2° grau completas**. Veja alguns exemplos:

$$-x^2+2x+1=0$$
$$6x^2-x+1,4=0$$
$$x^2+5x-13=0$$

Caso os coeficientes b ou c ou ambos sejam zero, dizemos que são **equações do 2° grau incompletas**. Veja alguns exemplos:

$$x^2-6=0$$
$$x^2+x=0$$
$$2x^2=0$$

Métodos para resolver uma equação de 2° grau

Resolver uma equação é determinar os valores que as incógnitas podem assumir, de modo que a igualdade seja satisfeita. Os valores determinados ao resolver uma equação são denominadas **raízes** ou **soluções** da equação. Para exemplificar, vamos substituir alguns valores para x na equação $x^2-2x-8=0$.

- Para $x=-2$

$$x^2-2x-8=0$$
$$(-2)^2-2\cdot(-2)-8=0$$
$$4+4-8=0$$
$$0=0$$

- Para $x=0$

$$x^2-2x-8=0$$
$$0^2-2\cdot 0-8=0$$
$$-8=0$$

- Para $x=1$

$$x^2-2x-8=0$$
$$1^2-2\cdot 1-8=0$$
$$1-2-8=0$$
$$-9=0$$

- Para $x = 4$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$4^2 - 2 \cdot 4 - 8 = 0$$
$$16 - 8 - 8 = 0$$
$$0 = 0$$

Nesse caso, ao substituir x por -2 ou por 4, obtemos uma sentença verdadeira $(0 = 0)$; por isso, podemos afirmar que -2 e 4 são raízes ou soluções da equação. Porém, ao substituir x por 0 ou por 1, obtemos sentenças falsas ($-8 = 0$ e $-9 = 0$, respectivamente); logo, 0 e 1 não são raízes da equação.

Fórmula resolutiva

Com essa fórmula é possível determinar as raízes de uma equação do 2º grau a partir de seus coeficientes.

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

O valor de Δ pode ser utilizado como parâmetro para decidir como serão as raízes da equação.

- $\Delta > 0 \Longrightarrow$ possui duas raízes reais distintas
- $\Delta = 0 \Longrightarrow$ possui duas raízes reais iguais, isto é, $x' = x''$
- $\Delta < 0 \Longrightarrow$ não possui raízes reais

Veja como podemos determinar as raízes das seguintes equações:

- $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$$
$$\Delta = 4 + 12$$
$$\Delta = 16$$
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-(-2) \pm 4}{2 \cdot 1}$$
$$x' = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ e } x'' = \frac{2-4}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

Portanto, as raízes da equação $x^2 - 2x - 3 = 0$ são 3 e -1.

- $x^2 + 8x + 16 = 0$

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16$$
$$\Delta = 64 - 64$$
$$\Delta = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-8 \pm 0}{2}$$

$$x' = x'' = -\frac{8}{2} = -4$$

Portanto, a raiz da equação $x^2 - 8x + 16 = 0$ é -4.

- $10x^2 + 6x + 10 = 0$ $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 10 \cdot 10$
  $\Delta = 36 - 400$
  $\Delta = -364$
  Portanto, a equação $10x^2 + 6x + 10 = 0$ não possui raízes reais.

Resolvendo equações do 2° grau do tipo $ax^2 = 0$, com $a \neq 0$.
Veja como podemos resolver as seguintes equações:

- $5x^2 = 0$

$5x^2 = 0$ (*Dividimos ambos os membros da equação por 5*)

$$\frac{5x^2}{5} = \frac{0}{5}$$

$$x^2 = 0$$
$$x \cdot x = 0$$

A equação $5x^2 = 0$ possui duas raízes reais iguais a 0.

- $7x^2 = 0$

$$7x^2 = 0$$

$$\frac{7x^2}{7} = \frac{0}{7}$$

$$x^2 = 0$$
$$x \cdot x = 0$$

A equação $7x^2 = 0$ possui duas raízes reais iguais a 0.

De modo geral, as equações do tipo $ax^2 = 0$, com a não nulo, possuem duas raízes reais e iguais a zero.

Resolvendo equações do 2° grau do tipo $ax^2 + c = 0$**, com** $a \neq 0$ **e** $c \neq 0$**.** Veja como podemos resolver as seguintes equações:

- $2x^2 + \frac{1}{2} = 5$

$$2x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2}$$

(*Adicionamos* $\frac{1}{2}$ *em ambos os membros da equação*)

$$2x^2 = \frac{9}{2}$$

$$2x^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

(*Multiplicamos 1/2 em ambos os membros da equação*)

$$x^2 = \frac{9}{4}$$

(*Existem dois números cujo quadrado é* $\frac{9}{4}$)

$$x = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{3}{2}$$

Portanto, as raízes da equação $2x^2+\frac{1}{2}=5$ são $\frac{3}{2}$ e $-\frac{3}{2}$.

- $-3x^2-2=10$

$$\begin{gathered}3x^2-2+2=10+2\\ -3x^2=12\\ -3x^2\cdot\frac{1}{-3}=12\cdot\frac{1}{-3}\\ \frac{-3x^2}{-3}=\frac{12}{-3}\\ x^2=-4\end{gathered}$$

Não existe um número real que elevado ao quadrado seja igual a -4. Logo, não existe número real x que seja solução da equação. Portanto, a equação $-3x^2-2=10$ não possui raízes reais.

De modo geral, as equações do tipo $ax^2+c=0$, com a e c não nulos, possuem duas raízes reais e opostas ou não possuem raízes reais.

Resolvendo equações do 2° grau do tipo $ax^2+bx=0$**,com** $a\neq 0$ **e** $b\neq 0$**.**
Veja como podemos resolver as seguintes equações:

- $x^2+3x=0$

$$\begin{gathered}x(x+3)=0\\ (\textit{Colocamos o fator em comum } x \textit{ em evidência.})\\ x=0 \text{ ou } x+3=0\Longrightarrow x=-3\end{gathered}$$

Portanto, as raízes da equação $x^2+3x=0$ são 0 e -3.

De modo geral, as equações do tipo $ax^2+bx=0$, com a e b não nulos, possuem duas raízes reais e distintas, das quais uma é igual a zero.

Resolvendo equações do 2° grau do tipo $ax^2+bx=0$**,com** $a\neq 0eb\neq 0$**.**
Até agora vimos a resolução de equações do 2° grau incompletas. Agora, vamos estudar alguns métodos para resolver equações do 2° grau completas, ou seja, do tipo $ax^2+bx+c=0$, com $a\neq 0$, $b\neq 0$ e $c\neq 0$. Podemos determinar as raízes de uma equação do 2° grau completa de várias maneiras, por exemplo, por meio de fatoração, completando quadrados ou utilizando a fórmula resolutiva.

- **Fatoração**

  Veja como podemos resolver a equação $x^2 + 8x + 16 = 25$ por meio de fatoração.

  O primeiro membro da equação é um trinômio quadrado perfeito. Por isso, podemos escrevê-lo da seguinte maneira:

$$
\begin{gathered}
x^2+8x+16=25 \\
(x+4)(x+4)=25 \\
(x+4)^2=25
\end{gathered}
$$

  Como existem dois números cujo quadrado é 25, temos:

$x+4=+\sqrt{25}$	ou	$x+4=-\sqrt{25}$
$x+4=5$		$x+4=-5$
$x+4-4=5-4$		$x+4-4=-5-4$
$x=1$		$x=-9$

  Portanto, as raízes da equação $x^2+8x+16=25$ são 1 e -9.

  Lembre-se de que um trinômio perfeito é uma expressão algébrica composta de três monômios que pode ser escrita por meio do quadrado da soma ou do quadrado da diferença de dois termos.

  $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ $\qquad$ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

- **Completar quadrados**

  Veja como podemos resolver a equação $x^2+6x+5=0$ utilizando o método de completar quadrados.

  O primeiro membro da equação não é um trinômio quadrado perfeito. Porém, podemos adicionar um número conveniente aos dois membros da equação para obtermos uma equação equivalente em que o primeiro membro seja um trinômio quadrado perfeito. Em seguida, podemos fatorar o primeiro membro da equação e obter a solução.

  Primeiro, isolamos o termo independente no 2° membro da equação.

$$
\begin{gathered}
x^2+6x+5=0 \\
x^2+6x+5-5=0-5 \\
x^2+6x=-5
\end{gathered}
$$

Assim, para obtermos um trinômio quadrado perfeito no primeiro membro da equação $x^2+6x=-5$, adicionamos 3^2 a ambos os membros da equação.

$$\begin{aligned} x^2+6x &= -5 \\ x^2+6x+3^2 &= -5+3^2 \\ \underbrace{x^2+6x+9}_{\textit{Trinômio quadrado perfeito}} &= 4 \end{aligned}$$

Fatoramos o trinômio quadrado perfeito e determinamos as raízes da equação.

$$\begin{aligned} x^2+6x+9 &= 4 \\ (x+3)^2 &= 4 \end{aligned}$$

Como existem dois números cujo quadrado é 4, temos:

$$\begin{array}{lcl} x+3=+\sqrt{4} & \text{ou} & x+3=-\sqrt{4} \\ x+3=2 & & x+3=-2 \\ x+3-3=2-3 & & x+3-3=-2-3 \\ x=-1 & & x=-5 \end{array}$$

12 Bibliografia

CHAVANTE, E. R. Radiciação. In:_____. Convergências: matemática. 9º ano: anos finais: ensino fundamental São Paulo: Sm, 2015. Cap. 1. p. 8-23.

“Equações do 2º grau” em Só Matemática. Virtuous Tecnologia da Informação, 1998-2018. Consultado em 18/02/2018 às 18:24. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/fundam/equacoes2/equacoes2.php>.

“Equações do 2º grau” em Só Matemática. Virtuous Tecnologia da Informação, 1998-2018. Consultado em 18/02/2018 às 18:24. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/fundam/equacoes2/equacoes2_3.php>.

“Equações do 2º grau” em Só Matemática. Virtuous Tecnologia da Informação, 1998-2018. Consultado em 18/02/2018 às 18:24. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/fundam/equacoes2/equacoes2_4.php>.

IEZZI, G; MURAKAMI, C. Fundamentos de Matemática Elementar. Volume 1: Conjuntos e Funções. 7ª edição. São Paulo: Atual, 2008.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. Potências e raízes. In:____. Fundamentos de Matemática Elementar 2. 8. ed. São Paulo: Atual, 1943. Cap. 1. p. 1-26

IEZZI, Gelson et al. Fundamentos da Matemática Elementar vol. 4. São Paulo: Atual, 1977.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R. Matemática: Volume Único. São Paulo: Atual Editora, 2002.

SOUZA, J. Coleção Novo Olhar Matemática: Ensino médio - Matemática. São Paulo: Ftd, 2010. 1 v.