UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS NATURAIS E EDUCAÇÃO

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PET - MATEMÁTICA

CURSO DE TRIGONOMETRIA

UBERABA - MG

2019

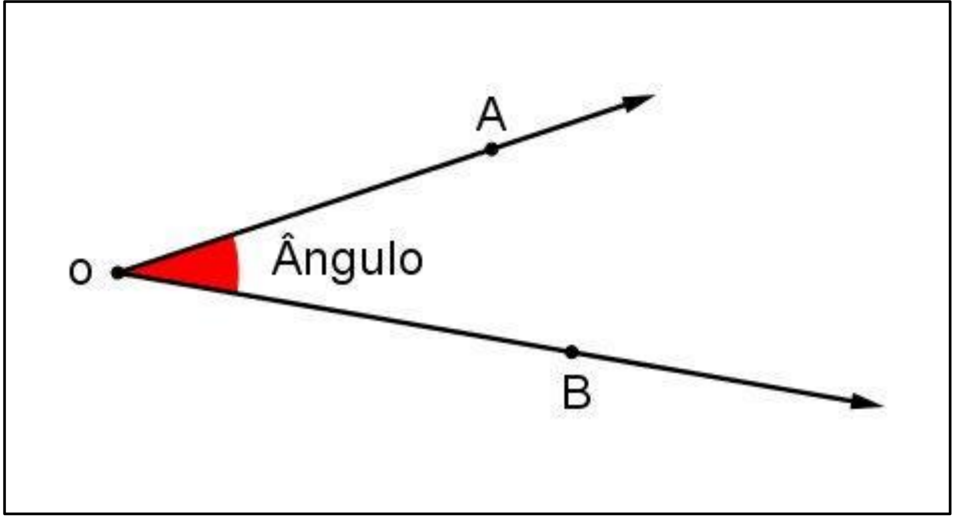
LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. ÂNGULO

Definição: Chama-se $\hat{a}ngulo$ à reunião de duas semirretas de mesma origem e não colineares.

Figura 1-Ângulo



Fonte: https://www.infoescola.com/matematica/angulos/

Notação: O ponto O é o vértice do ângulo. As semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os lados dos ângulos.

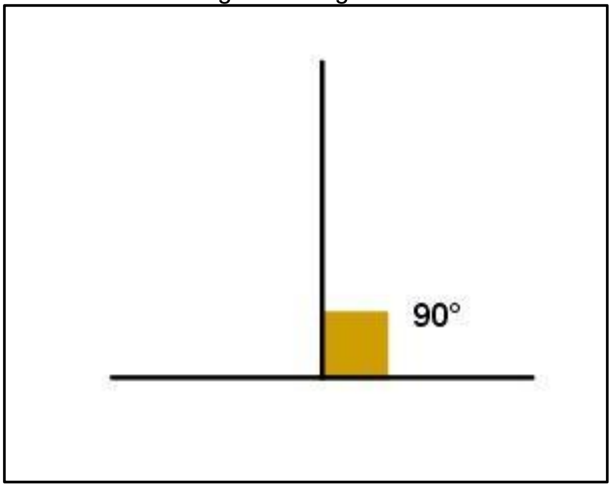
O ângulo em destaque na figura 1 tem a seguinte notação:

$$A\hat{O}B$$

1.1 ÂNGULOS RETO, AGUDO, OBTUSO

Definição: Ângulo Reto é todo ângulo com medida igual a $90°$.

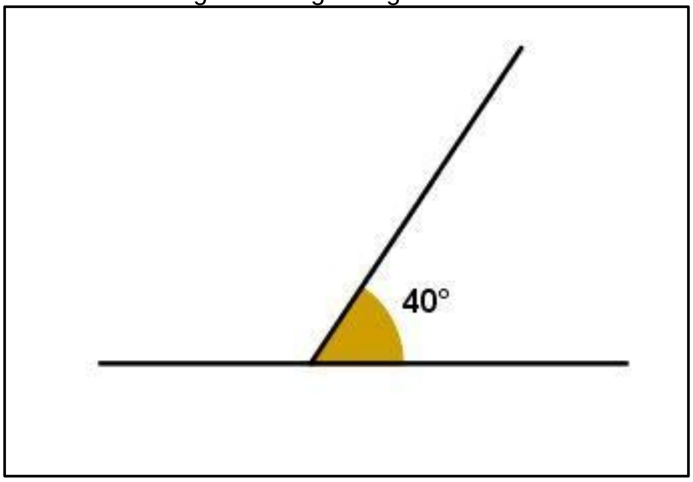
Figura 2-Ângulo Reto



Fonte: https://www.infoescola.com/matematica/angulos/

Definição: Ângulo Agudo é todo ângulo com medida menor que $90°$, ou seja, $0 < x < 90°$.

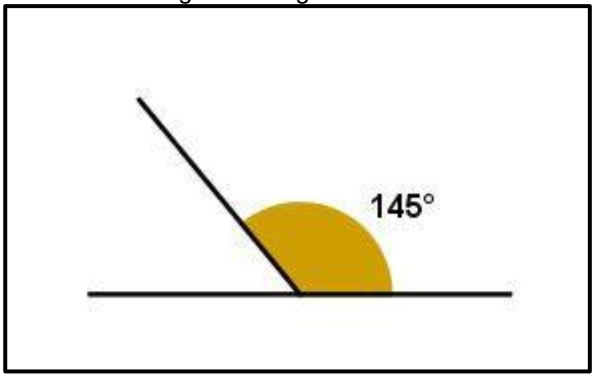
Figura 3-Ângulo Agudo



Fonte: https://www.infoescola.com/matematica/angulos/

Definição: Ângulo obtuso é todo ângulo com medida maior que 90° ou seja, $90° < x$.

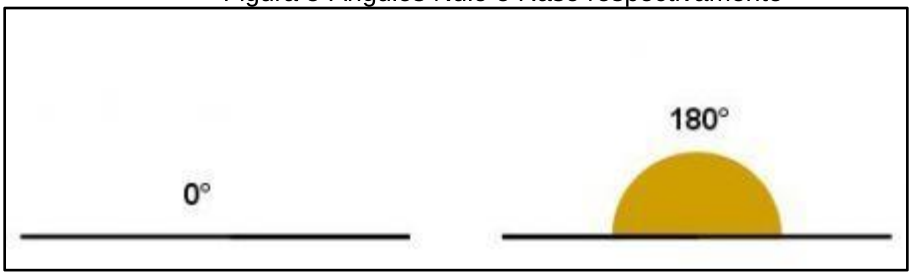
Figura 4-Ângulo Obtuso



Fonte: https://www.infoescola.com/matematica/angulos/

Definição: Ângulo Nulo é todo ângulo cujos lados são coincidentes e Ângulo Raso é todo ângulo cujos lados são opostos.

Figura 5-Ângulos Nulo e Raso respectivamente



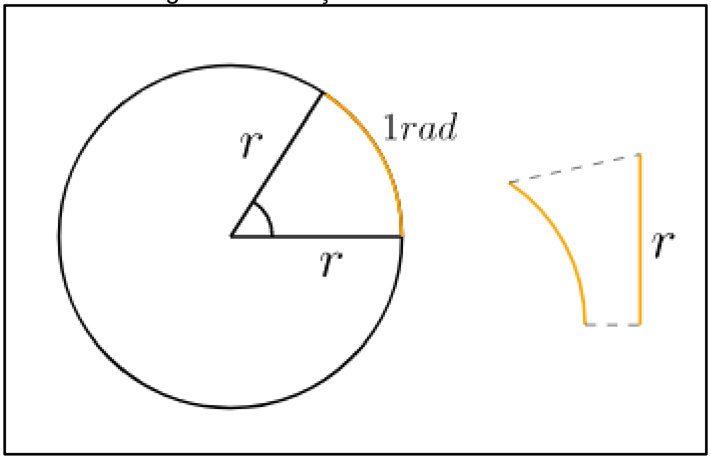
Fonte: https://www.infoescola.com/matematica/angulos/

1.2 UNIDADE DE MEDIDA

Normalmente, os ângulos são medidos em graus (°). Mas existe outra medida também bastante utilizada para medir uma circunferência (ou um arco): os radianos (rad), utilizados especialmente para o caso de operações representadas no círculo trigonométrico.

Em uma circunferência, o ângulo correspondente a 1 radiano é aquele cuja abertura compreende um arco com comprimento igual ao raio da circunferência.

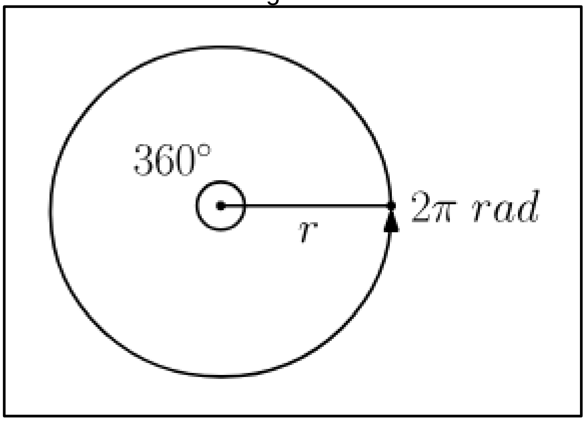
Figura 6-Definição de Radiano



Fonte: https://matika.com.br/radianos/definicao-do-radiano

Numa circunferência completa temos:

Figura 7



Fonte: https://matika.com.br/radianos/relacao-entre-graus-e-radianos

Portanto, o comprimento total de uma circunferência define $2\pi\ rad$. Em graus, dizemos que uma volta completa mede 360°. Logo:

$$2\pi = 360°$$

A partir daí também é possível concluir que:

$$\pi = 180°$$

Note que essa informação é bastante utilizada para realizar a transformação de medida de radianos para grau ou vice e versa.

Concluímos que, uma medida em graus é **diretamente proporcional** a uma medida em radianos, portanto é possível aplicar a **regra de três**.

Comprimento de arco

Para determinarmos o comprimento de uma circunferência utilizamos a seguinte expressão matemática: $C = 2 * \pi * r$

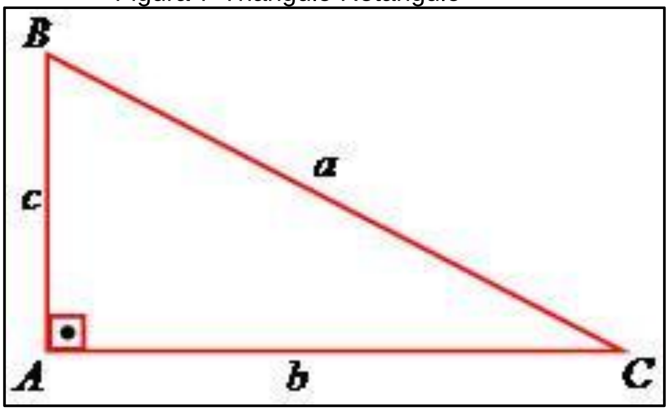
Para determinar o comprimento do arco de uma circunferência temos a seguinte fórmula: $l = \frac{\alpha * \pi * r}{180}$, onde r é o raio e α é o ângulo central, e neste caso π =3,14.

Caso o ângulo central seja dado em radianos, utilizamos a seguinte expressão: $l = \alpha * r$.

2. TRIÂNGULO RETÂNGULO

Definição: Temos um triangulo retângulo quando um dos três ângulos internos é reto. Na figura abaixo temos um ângulo reto em A.

Figura 7-Triângulo Retângulo



Sabe-se que o lado oposto ao ângulo reto, no caso lado $\underline{BC}$ (a), é a hipotenusa e que os outros dois lados, $\underline{AB}$ (c) e $\underline{AC}$ (b), são os catetos do triângulo ABC.

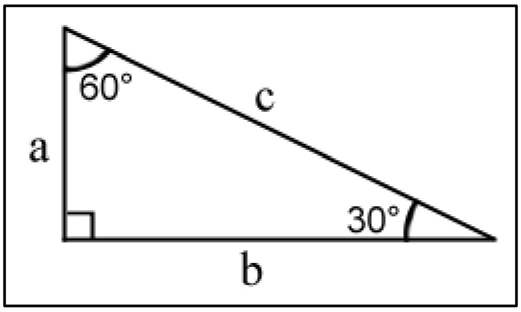
Ainda em relação ao triângulo retângulo, temos o teorema de Pitágoras, que consiste que a soma do quadrado dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

2.1 PROPRIEDADES TRIGONOMÉTRICAS

Dado um triângulo:

Figura 8 - Triângulo Retângulo



Temos que no triângulo retângulo, o seno de um ângulo é dado pela razão da medida do cateto oposto ao mesmo ângulo e pela hipotenusa.

$$sen = \frac{cat\ oposto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

Já o cosseno, temos a razão formada pela medida do cateto adjacente ao mesmo ângulo e pela hipotenusa.

$$cos = \frac{cat\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

E a tangente é dada pela razão do cateto oposto sobre o cateto adjacente.

$$\text{tg } 30° = \frac{cat\ oposto}{cat\ adjacente} = \frac{a}{b}$$

A cotangente é a razão do cateto adjacente pelo cateto oposto:

$$cotg\ 30° = \frac{cat\ adjacente}{cat\ oposto} = \frac{b}{a} = \frac{1}{tg\ \ 30°}$$

A secante é a razão da hipotenusa pelo cateto adjacente:

$$sec\ 30° = \frac{hipotenusa}{cat\ adjacente} = \frac{c}{b} = \frac{1}{cos\ 30°}$$

A cossecante é a razão da hipotenusa pelo cateto oposto:

$$cossec\ 30° = \frac{hipotenusa}{cat\ oposto} = \frac{c}{a} = \frac{1}{30°}$$

Aqui temos os ângulos notáveis, que são os mais usuais:

Figura 9-Ângulos Notáveis

	0°	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

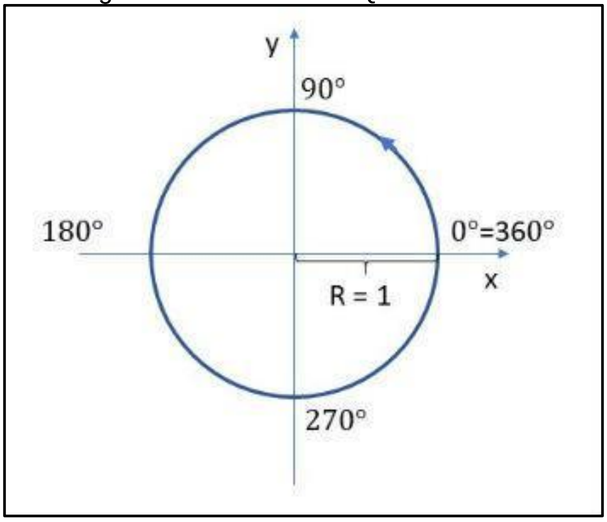
Temos ainda, definida a partir do teorema de Pitágoras, a relação trigonométrica fundamental, representada por:

$$sen^{\,2}\,x\ +\ cos^{\,2}\,x\ =\ 1$$

3. TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

O ciclo ou circunferência trigonométrica é associada a coordenadas cartesianas. Considerando uma circunferência qualquer de centro O e raio r = 1, podemos notar que o comprimento dessa circunferência é 2 π. Ele é dividido em 4 partes (quadrantes), cortado pelo eixo y (ordenadas) e o x (abcissas) e é mais comumente usado o sentido anti-horário no ciclo trigonométrico.

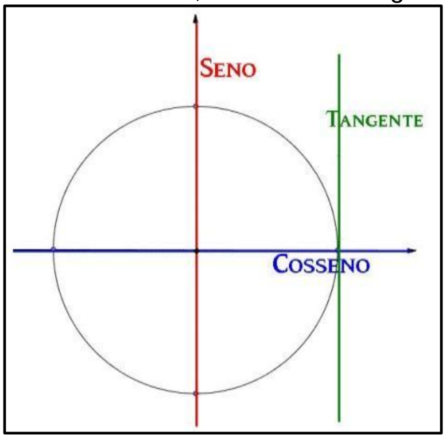
Figura 10 - Divisão dos Quadrantes



De acordo com esses quadrantes em conjunto com as relações fundamentais existentes e já citadas, podemos definir os sinais (positivo e negativo) de cada um.

Com base nas retas definidas do seno/cosseno/tangente se consegue definir o lado positivo e negativo.

Figura 11 - Retas Seno, Cosseno e Tangente

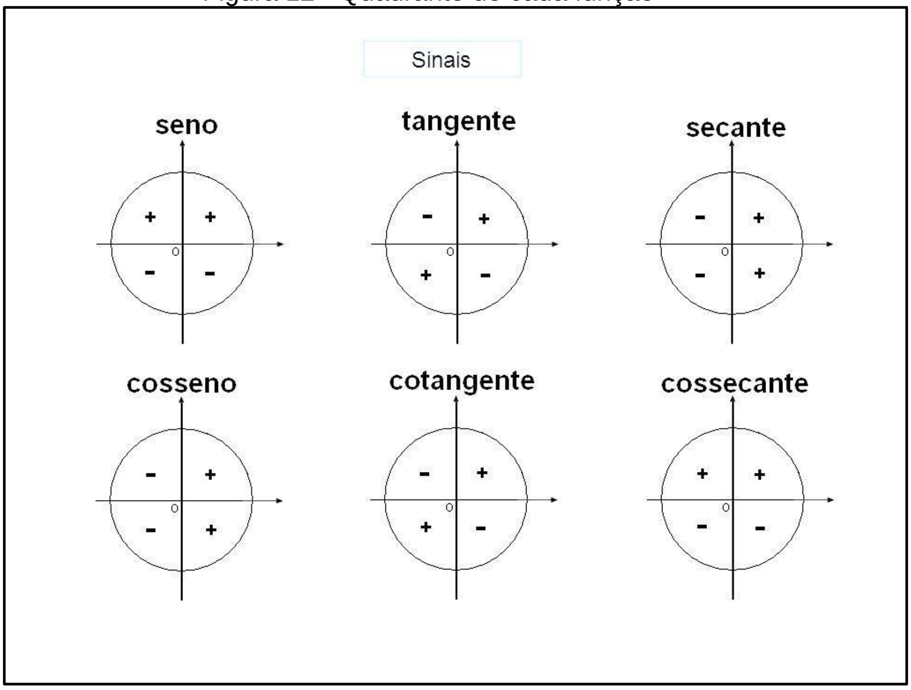


Sabendo-se que o centro vale zero, então:

- Na reta do seno, acima do zero é positivo e abaixo negativo;
- Na reta do cosseno, direita do zero é positivo e esquerda negativo;
- Na reta da tangente, as retas e projeções que dão acima da projeção do zero na reta tangente, são positivos e abaixo são negativos;
- A cotangente é o inverso da tangente, logo adota os mesmos sinais;
- A secante é o inverso do cosseno, logo adota os mesmos sinais;
- A cossecante é o inverso do seno, logo adota os mesmos sinais.

Assim temos:

Figura 12 - Quadrante de cada função

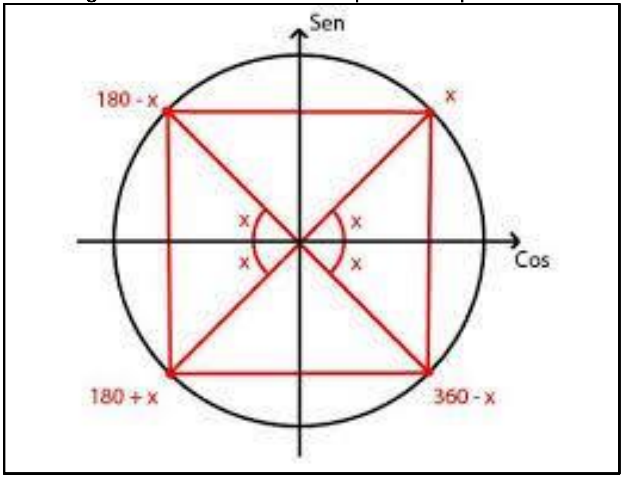


Redução ao primeiro quadrante é possível graças à simetria presente no ciclo trigonométrico com algumas mudanças de sinais. Para trazer os ângulos para o primeiro quadrante é necessário fazer algumas contas, mostradas a seguir:

- Do segundo para o primeiro – pega π ou 180° e subtrai o valor do ângulo.
- Do terceiro para o primeiro – pega o valor do ângulo e subtrai por π ou 180°.
- Do quarto para o primeiro – pega 2π ou 360° e subtrai pelo valor do ângulo.

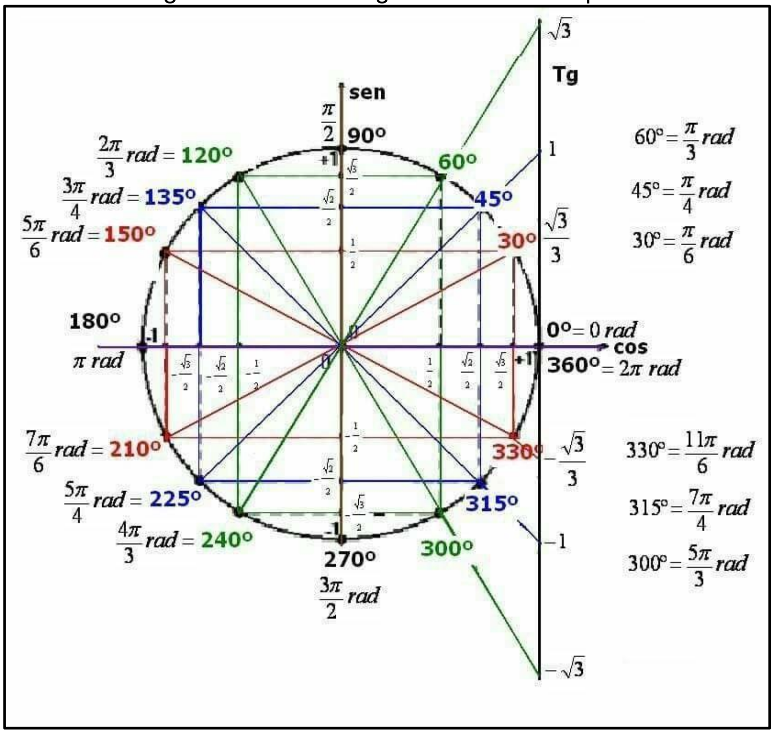
Assim, os correspondentes de um ângulo x qualquer nos demais quadrantes vão ser:

Figura 13 - Valores de x para os quadrantes



Para melhor compreensão de tudo o que foi dito acima, podemos consultar a circunferência trigonométrica:

Figura 14 - Ciclo Trigonométrico Completo



4. OPERAÇÕES COM ARCOS E ARCOS DUPLOS

Arcos duplos são relações trigonométricas utilizadas pra calcular um arco que multiplicado por dois, ou seja, foi dobrado. Mas ao se dobrar o arco, não podemos apenas dobrar as funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente), e por isso temos algumas fórmulas para realizar esse cálculo.

Para o seno, quando é necessário saber a adição, subtração de dois arcos, “a” e “b”, e o arco duplo se usa as seguintes fórmulas:

$$sen\ (a\ +\ b)\ +\ sen\ a\ .cos\ b\ +\ cos\ a\ .sen\ b$$

$$sen\ (\ a -\ b)\ =\ sen\ a\ .cos\ b - cos\ a\ .sen\ b$$

$$sen\ 2a\ =\ 2\ .sen\ a\ .cos\ a$$

Para o cosseno, temos:

$$cos\ (\ a\ +\ b)\ =\ cos\ a\ .cos\ b - sen\ a\ .sen\ b$$

$$cos\ (\ a -\ b)\ =\ cos\ a\ .cos\ b\ +\ sen\ a\ .sen\ b$$

$$cos\ 2a\ =\ 2\ cos^2\ a - 1\ ou\ cos\ 2a\ =\ 1 - sen^2\ a$$

Para tangente:

$$tg\ (\ a\ +\ b)\ =\ \frac{tg\ a\ \ +\ tg\ b}{1\ -\ tg\ a\ .\ tg\ b}$$

$$tg\ (\ a -\ b)\ =\ \frac{tg\ a\ -\ tg\ b}{1 +\ tg\ a\ .\ tg\ b}$$

$$tg\ 2a\ =\ \frac{2\ .\ tg\ a}{1 -\ tg^2 a}$$

E para a cotangente:

$$cotg\ (a + b) = \frac{cotg\ a\ .cotg\ b - 1}{cotg\ a + cotg\ b}$$

$$cotg\ (a - b) = \frac{cotg\ a\ .cotg\ b + 1}{cotg\ b - cotg\ a}$$

$$cotg\ 2a = \frac{cotg^2 a - 1}{2\ .cotg\ a}$$

5. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Também chamadas como funções circulares, estão relacionadas com as demais voltas do ciclo trigonométrico. Ela é periódica, ou seja, tem um comportamento periódico que ocorre em determinados intervalos de tempo. Assim o período corresponde ao menor intervalo de tempo em que acontece a repetição de determinado fenômeno.

A seguir vamos falar das principais funções trigonométricas

5.1 FUNÇÃO SENO

A função seno é periódica de período 2π , expressa por:

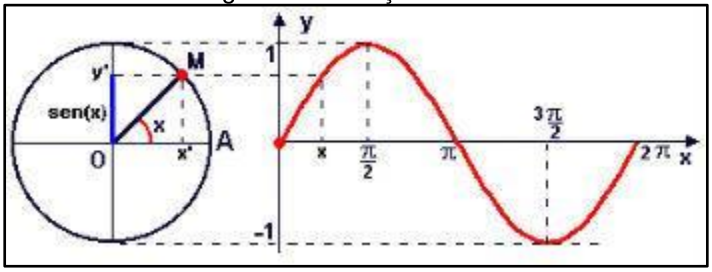
$$função\ f\ (x)\ =\ sen\ x$$

No círculo trigonométrico a função seno tem sinais positivos no primeiro e segundo quadrante e negativo no terceiro e quarto quadrante. Além disso, ela também no primeiro e quarto quadrante é denominada de crescente e no segundo e terceiro como decrescente.

Seu domínio e contra domínio estão em R (Reais), sendo definido para todos os valores reais existentes. Já o conjunto de imagem da função seno corresponde ao intervalo real $[-1,1]$, onde $-1 \leq x \leq 1$.

Em relação à simetria ela é uma função ímpar, visto que $sen\ (-x) = -sen\ x$. E o gráfico da função f (x) = sen x é uma curva de nome senóide.

Figura 15 - Função Seno



5.2 FUNÇÃO COSSENO

Ela também é uma função periódica de período 2π, expressa por:

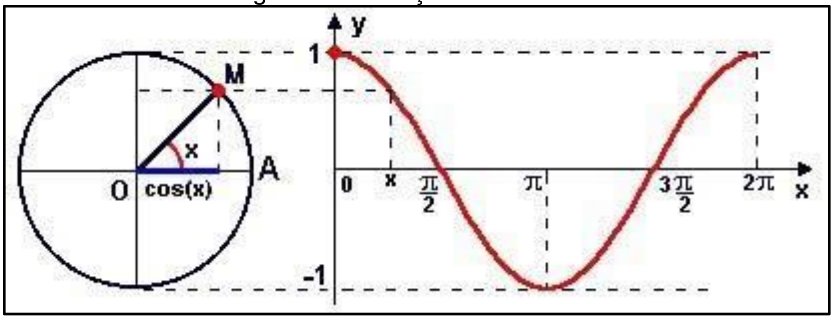
$$função\ f\ (x)\ =\ cos\ x$$

Tem valores positivos no primeiro e quarto quadrante e negativo no segundo e terceiro quadrante, e é decrescente no primeiro e segundo quadrante e crescente no terceiro e quarto.

Seu domínio e contra domínio também pertence aos reais (R), e sua imagem corresponde ao intervalo $[-1{,}1]$, que é $-1 \leq y \leq 1$.

É uma função par em ralação a simetria, onde $(-x) = cos\ cos\ x$. E seu gráfico é uma curva chamada cossenóide.

Figura 16 - Função Cosseno



5.3 FUNÇÃO TANGENTE

A função tangente é periódica com período de π, apenas. E é representado por:

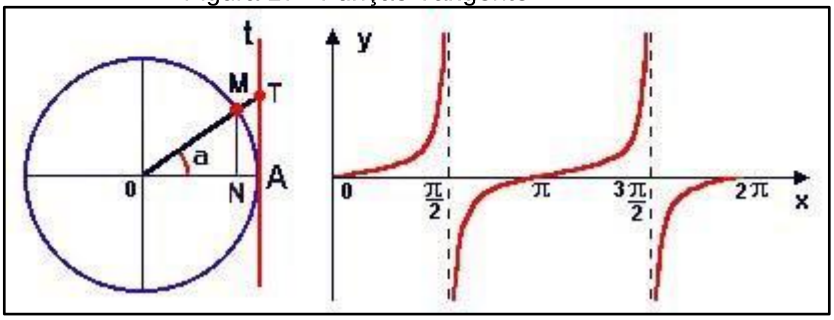
$$função\ f\ (x)\ =\ tg\ x$$

Seu sinal é positivo no primeiro e terceiro quadrante e negativo no segundo e quarto quadrante. Ela é crescente em todos os quadrantes do circulo trigonométrico.

Seu domínio restringe a: Dom (tg) = {x ∈ R/ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k$ ∈ Z}, e sua imagem corresponde aos números reais (R).

A função tangente é ímpar, $tg\ (-x) = -tg\ x$, e forma uma curva chamada tangentóide.

Figura 17 - Função Tangente



5.4 FUNÇÃO COTANGENTE

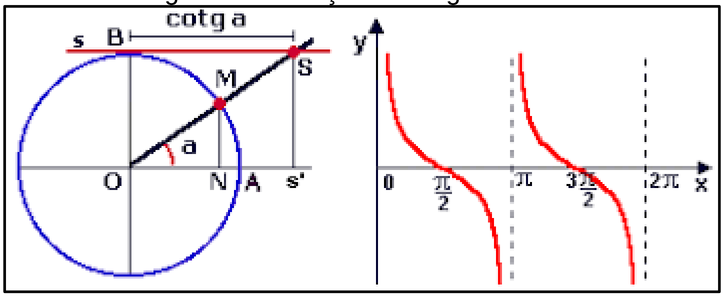
A função cotangente é periódica de período igual a π, representado por:

$$f\ (x)\ =\ cotg\ x$$

Ela é positiva nos quadrantes 1 e 3, e negativo no 2 e 4. E é uma função ímpar, que $cotg\ (-x) = -cotg\ x$.

Seu domínio apresenta uma peculiaridade parecida com a da tangente, sendo não existente quando $tg\ x = 0$. Assim temos, Dom (cotg) = $\{x \in$ R/ $x \neq k\pi; k \in$ Z$\}$. Sua imagem pertence aos números reais.

Figura 18 - Função Cotangente



5.5 FUNÇÃO SECANTE

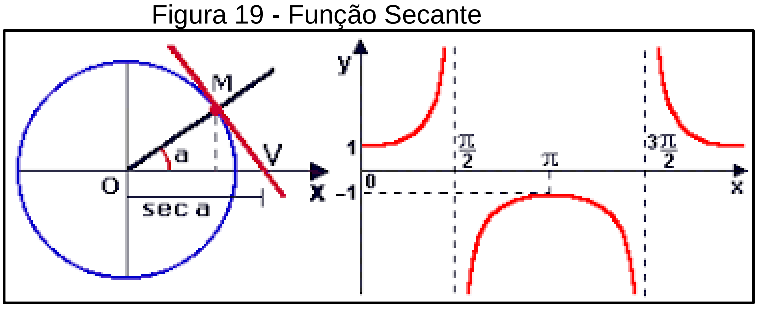
Função secante é periódica com um período igual a 2π, representando por:

$$função\ f\ (x)\ =\ sec\ x$$

Ela é positiva no primeiro e quarto quadrante e negativo no segundo e terceiro quadrante, e é uma função par, onde $sec\ (-x) = sec\ x$.

Seu domínio são os reais, exceto para $cos\ x = 0$, ou seja, sen (dom) = $\{x \in$ R/ $x \neq \frac{\pi}{2}\ k\pi; k \in$ Z$\}$. O conjunto imagem da função secante é Im = $\{y \in$ R/ $y \leq -1\ ou\ y \geq 1\}$.

Figura 19 - Função Secante



5.6 FUNÇÃO COSSECANTE

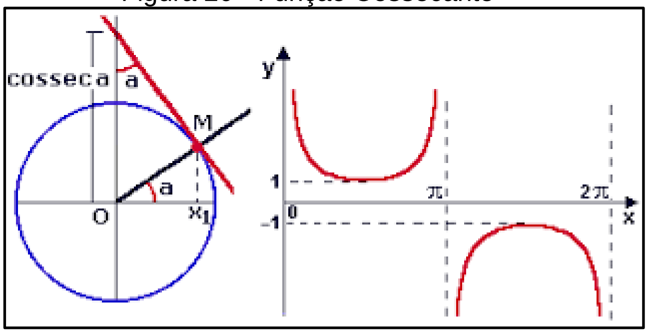
A função cossecante é periódica de período igual a 2π, representado por:

$$função\ f\ (x)\ =\ cossec\ x$$

Ela é positiva no primeiro e segundo quadrante e negativa no terceiro e quarto. E é uma função ímpar, que$cossec\ (-x) = -cossec\ x$.

Seu domínio pertence aos reais, exceto para $sen\ x = 0$. Assim cos (dom) = $\{x \in$ R/ $x \neq k\pi; k \in$ Z$\}$. Já a imagem pertence aos reais, exceto para o intervalo $[-1,1]$, ou seja, Im = $\{y \in$ R/ $y \leq -1$ e $y \geq 1\}$.

Figura 20 - Função Cossecante



REFERÊNCIAS

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar 3:** Trigonometria. São Paulo: Atual Editora, 2013.

ALVES, Diego. **A TRIGONOMETRIA DO ENSINO FUNDAMENTAL PARA O ENSINO MÉDIO:** UMA PROPOSTA DIDÁTICA. 2017. 68 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2017.