UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGU
MINEIRO

UBERABA - 2021

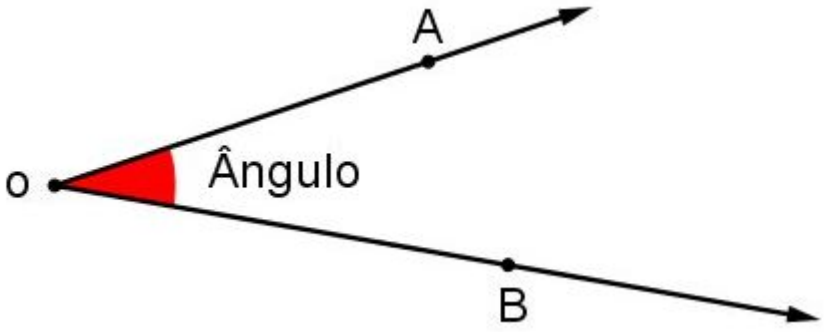
Minicurso de Trigonometria PET - Matemática

Gustavo Henrique
Helamã Oliveira
Renan Antunes
Victor Dourado

ÂNGULOS

O que é ângulo?

Vamos começar pela mais básica das perguntas. Chama-se de ângulo a medida de inclinação relativa à reunião de duas retas ou semirretas que partem do mesmo ponto, tendo a mesma origem. Essas retas podem ou não formar dois planos.



ÂNGULOS

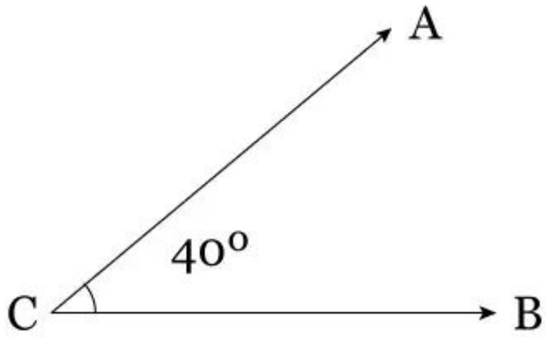
Sabendo disso, temos uma maneira fácil de colocá-las em notação.
Na imagem anterior, o ponto *O* é o vértice (região mais afastada de uma figura, onde as partes se encontram) do ângulo. Assim, as semirretas citadas *OA* e *OB* são tidas como os lados do ângulo.

O ângulo em destaque na figura recebe a seguinte notação:

$$A\hat{O}B.$$

ÂNGULOS

Exemplo:
Aqui temos, por exemplo, um ângulo de 40º exposto entre duas semirretas, *A* e *B*.



A notação referente a ele é: *40º = AĈB*.

ÂNGULOS

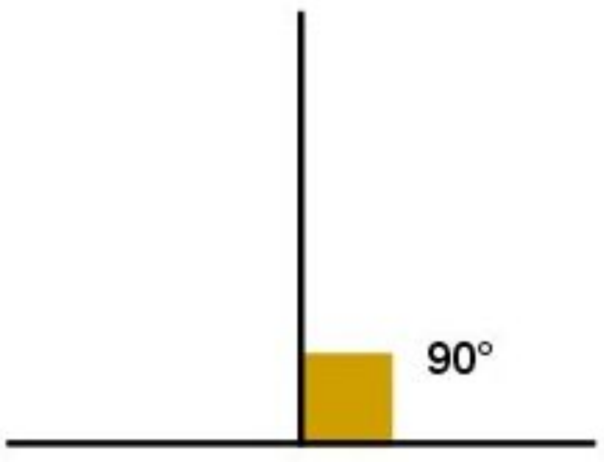
Quais são os tipos de ângulos?
Existem diferentes tipos de ângulos e, justamente por isso, devemos nos atinar às suas diferentes propriedades.

Temos o **ângulo reto**, o **ângulo agudo**, o **ângulo obtuso**, o **ângulo nulo**, o **ângulo raso**, dentre outros.

A seguir, vamos aos exemplos citados e não citados.

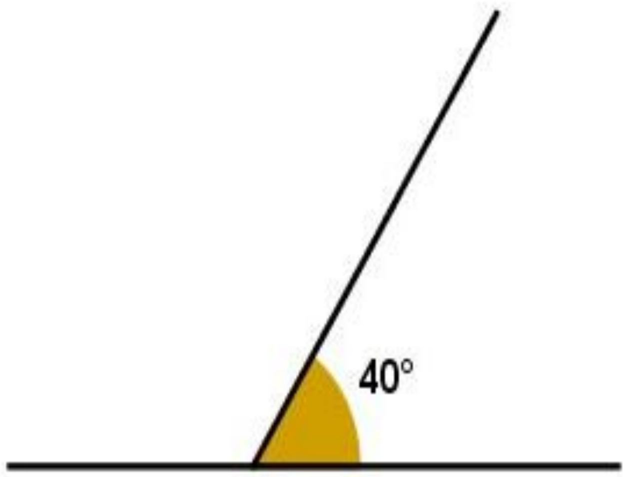
ÂNGULOS

Ângulo Reto
Chamaremos de ângulo reto todo aquele ângulo cuja medida possui exatamente 90°.



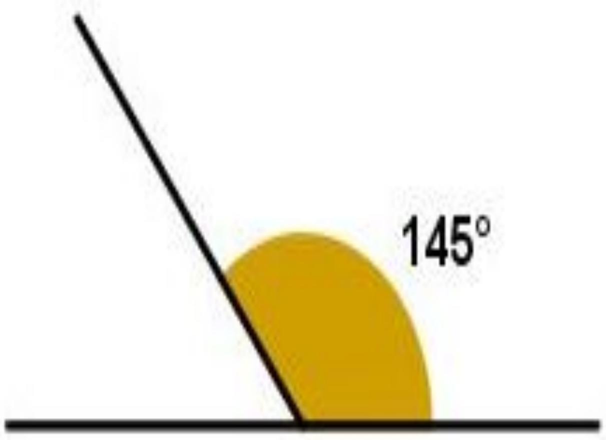
ÂNGULOS

Ângulo Agudo
Chamamos de ângulo agudo todo ângulo cuja medida é menor que 90°.



ÂNGULOS

Ângulo Obtuso
Chamamos de ângulo obtuso todo ângulo cuja medida é maior que 90º.

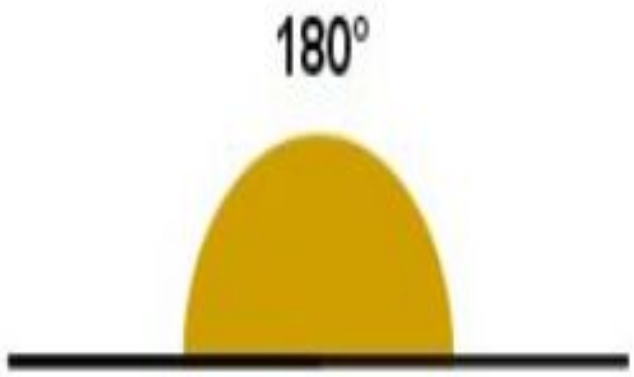


ÂNGULOS

Ângulo Nulo
Chamamos de ângulo nulo todo ângulo que não possui abertura; ou seja, que tem 0°.

ÂNGULOS

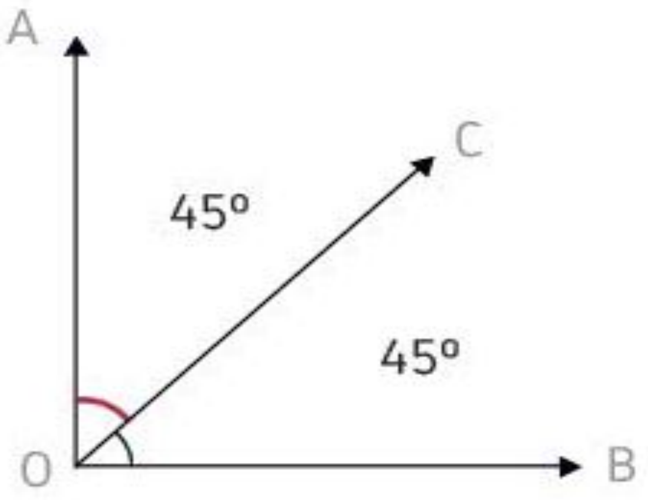
Ângulo Raso
Chamamos de ângulo raso todo ângulo cuja medida possui exatamente 180°.



ÂNGULOS

Ângulos Consecutivos

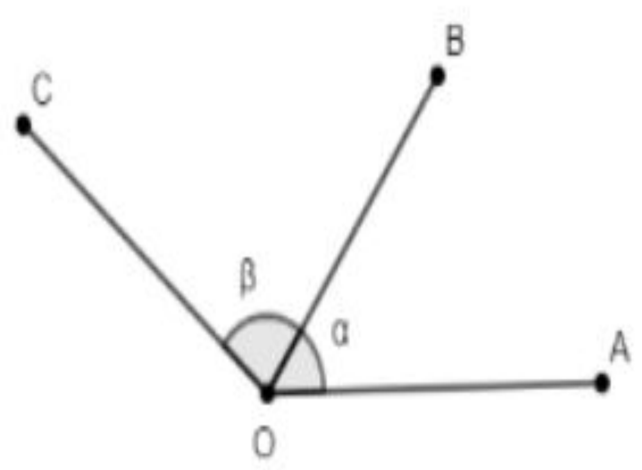
Dois ângulos são consecutivos se eles compartilham um mesmo lado, ou seja, se o lado de um for também o mesmo lado do outro.



ÂNGULOS

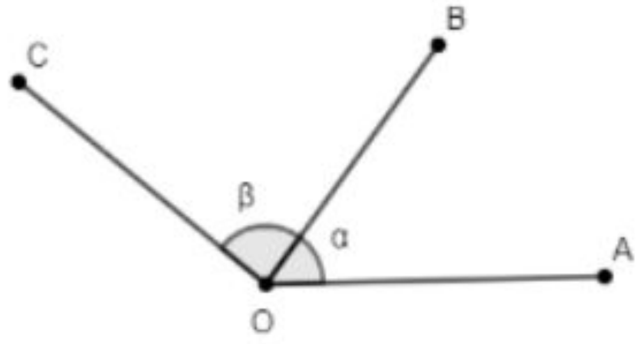
Ângulos adjacentes

Chamamos de ângulos adjacentes dois ângulos consecutivos que não compartilham pontos internos, ou seja, não estão sobrepostos um em relação ao outro.



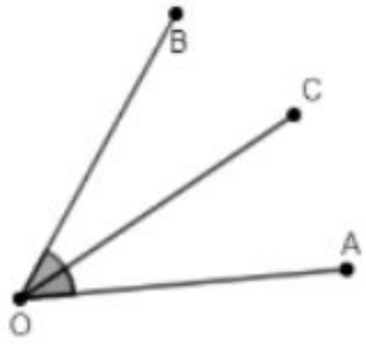
ÂNGULOS

Para noção de curiosidade, eis a diferença entre um ângulo adjacente e um ângulo que não é adjacente:



AÔB é adjacente a BÔC

ou



AÔC **não** é adjacente a AÔB

ÂNGULOS

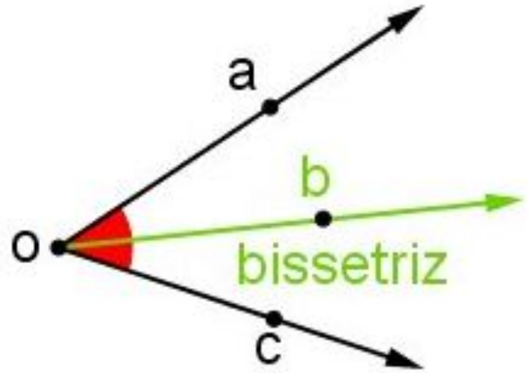
Ângulos Congruentes
Chamamos de ângulos congruentes aqueles que possuem a mesma medida.

ÂNGULOS

Bissetriz de um ângulo

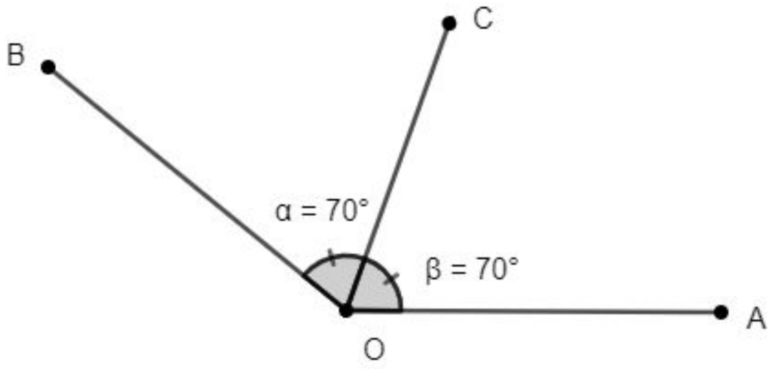
Chamamos de bissetriz de um ângulo a semirreta que parte do vértice de um determinado ângulo, sendo responsável por dividi-lo em dois ângulos congruentes.

Ou seja, a semirreta *b*, interna ao ângulo *AÔC*, é bissetriz desse ângulo se, e somente se, *AÔB* for igual a *BÔC*.



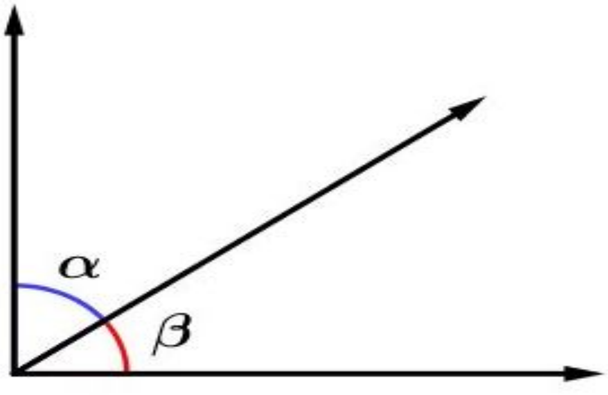
ÂNGULOS

Exemplo: Uma bissetriz C corta um ângulo de obtuso de 140º entre as semirretas *A* e *B*. Logo, os novos ângulos formados correspondem, respectivamente, a 70º cada.



ÂNGULOS

Ângulos Complementares
Chamamos de ângulos complementares aqueles cuja soma equivale a 90º; isto é, um torna-se o complemento do outro.



$$\alpha + \beta = 90^o$$

ÂNGULOS

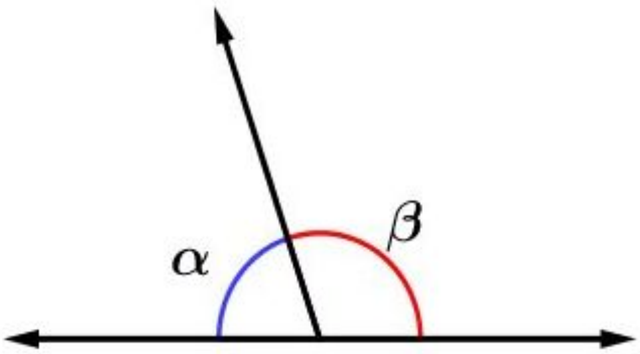
Exemplo: Os ângulos A e B são complementares. Sabendo que A = 60º, indique quanto mede o ângulo B.

$$A + B = 90^{\circ}$$
$$60^{\circ} + B = 90^{\circ}$$
$$B = 90^{\circ} - 60^{\circ}$$
$$B = 30^{\circ}$$

ÂNGULOS

Ângulos Suplementares

Chamamos de ângulos suplementares aqueles cuja soma equivale a 180º; isto é, um torna-se o suplemento do outro.



$$\alpha + \beta = 180^o$$

ÂNGULOS

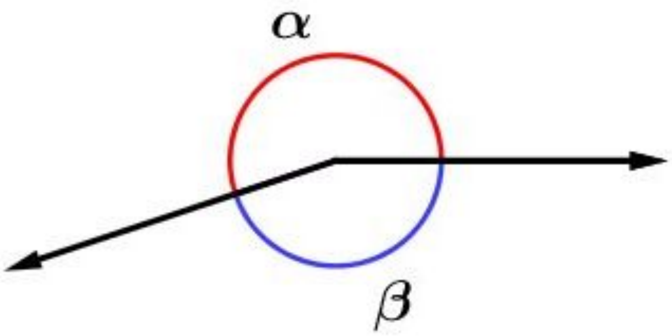
Exemplo: Os ângulos A e B são suplementares. Sabendo que A = 75º, indique quanto mede o ângulo B.

$$A + B = 180^\circ$$
$$75^\circ + B = 180^\circ$$
$$B = 180^\circ - 75^\circ$$
$$B = 105^\circ$$

ÂNGULOS

Ângulos Replementares

Conhecemos como ângulos replementares aqueles cuja soma equivale a 360º; isto é, um é o replemento do outro.



$$\alpha + \beta = 360^o$$

ÂNGULOS

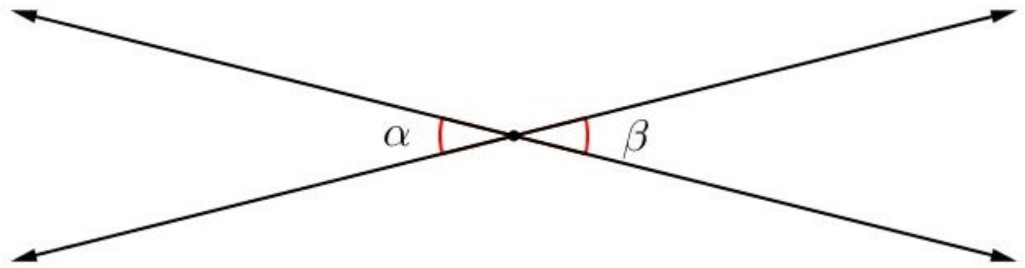
Exemplo: Os ângulos A e B são replementares. Sabendo que A = 35º, indique quanto mede o ângulo B.

$$A + B = 360^\circ$$
$$35^\circ + B = 360^\circ$$
$$B = 360^\circ - 35^\circ$$
$$B = 325^\circ$$

ÂNGULOS

Ângulos Opostos pelo Vértice

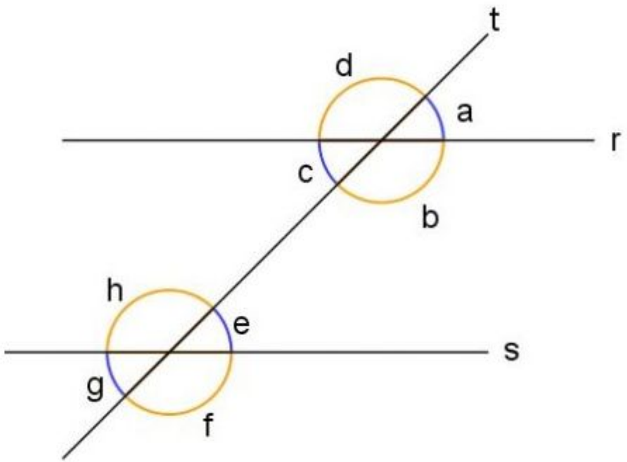
Chamamos de ângulos opostos pelo vértice as semirretas que se encontram, formando um mesmo vértice com ângulos opostos aos dois lados. Os ângulos opostos pelo vértice serão sempre iguais.



$$\alpha = \beta$$

ÂNGULOS

Retas cortadas por uma transversal
Temos, como exemplo, a representação de duas retas paralelas e distintas, que chamaremos aqui de *r* e *s*, cortadas por uma outra reta transversal *t*, delimitando oito ângulos. Esses ângulos serão suplementares ou congruentes.



ÂNGULOS

Assim, os ângulos formados serão nomeados de uma maneira especial:

$$\text{Correspondentes: } \begin{cases} a = e \\ b = f \\ d = h \\ c = g \end{cases}$$

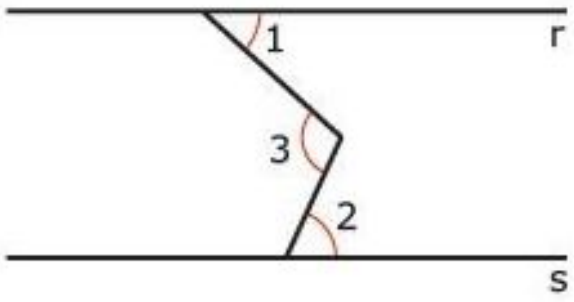
$$\text{Alternos: } \begin{cases} \text{internos: } & \begin{cases} b = h \\ c = e \end{cases} \\ \text{externos: } & \begin{cases} a = g \\ d = f \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Colaterais: } \begin{cases} \text{internos: } & \begin{cases} b + e = 180^o \\ c + h = 180^o \end{cases} \\ \text{externos : } & \begin{cases} a + f = 180^o \\ d + g = 180^o \end{cases} \end{cases}$$

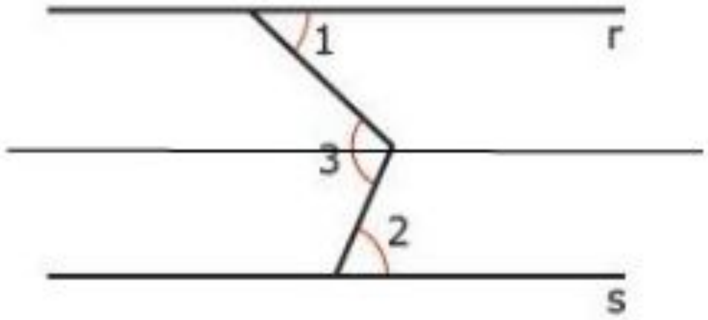
ÂNGULOS

Exemplo: (FUVEST-SP)
Na figura a seguir, as retas r e s são paralelas, o ângulo 1 mede 45° e o ângulo 2 mede 55°. A medida, em graus, do ângulo 3 é:

a) 50º
b) 55º
c) 60º
d) 80º
e) 100º



ÂNGULOS

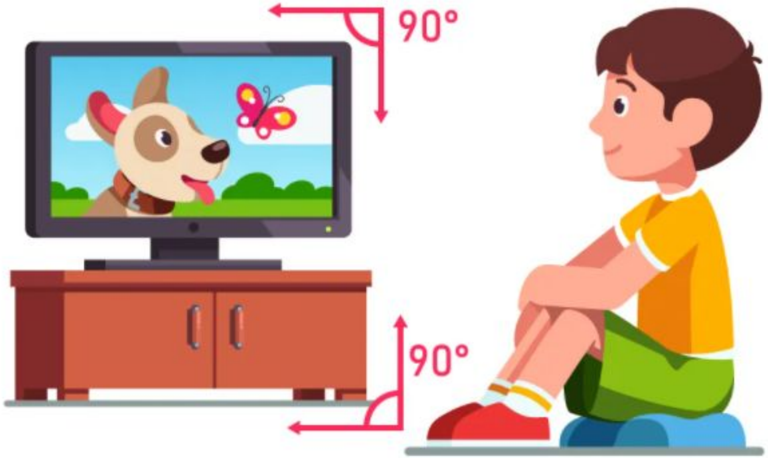


Sendo assim, a resposta será:

ÂNGULOS

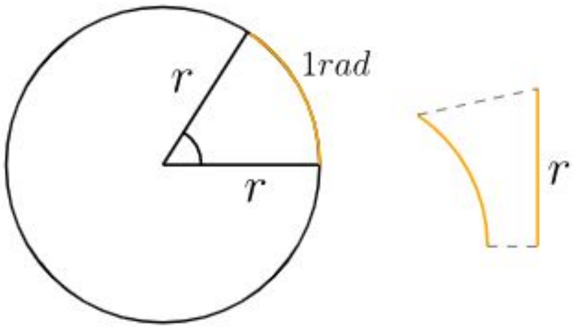
Ângulos no Cotidiano

Você certamente já ouviu que a matemática está presente em todos os lugares. Como diversas áreas dessa matéria, os ângulos não fogem à regra. A seguir veremos pequenos exemplos de ângulos que podemos encontrar no nosso cotidiano.



UNIDADE DE MEDIDAS

Normalmente, os ângulos são medidos em graus. Mas existem também outras medidas utilizadas para medir uma circunferência (ou um arco); uma delas é o radiano (rad). Utilizados especialmente para o caso de operações representadas no círculo trigonométrico.
Em uma circunferência, o ângulo correspondente a 1 radiano é aquele cuja abertura compreende um arco com comprimento igual ao raio da circunferência.



UNIDADE DE MEDIDAS

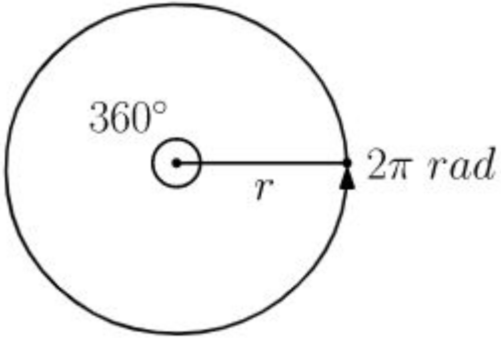
Numa circunferência completa temos:
Uma volta completa no círculo trigonométrico corresponde, em graus, a 360° e em radianos, 2π *rad*.

Assim:

$$2\pi = 360°$$

A partir daí também é possível concluir que:

$$\pi = 180°$$



UNIDADE DE MEDIDAS

Desta forma, no caso de medida de ângulo, o valor de π passa a ser referente a 180º. Note que essa informação é bastante utilizada para realizar a transformação de medida de radianos em graus, e vice-versa. Concluímos que, uma medida em graus é diretamente proporcional a uma medida em radianos, portanto é possível aplicar a regra de três.

Exemplo: Transforme 90° em radianos.

$$\begin{array}{l} \pi \; --- \; 180^\circ \\ x \; --- \; 90^\circ \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 180\,x &= 90\,\pi \\ x &= \frac{90\pi}{180} \\ x &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

UNIDADE DE MEDIDAS

Comprimento de arco

Para determinarmos o comprimento de uma circunferência, utilizamos a seguinte expressão matemática:

$$C = 2 * \pi * r$$

Para determinar o comprimento do arco de uma circunferência, temos a seguinte expressão:

$$l = (\alpha * \pi * r)\ /180$$

Onde r é o raio e α é o ângulo central; neste caso, consideraremos π =3,14.

Caso o ângulo central seja dado em radianos, utilizamos a seguinte expressão:

$$l = \alpha * r$$

UNIDADE DE MEDIDAS

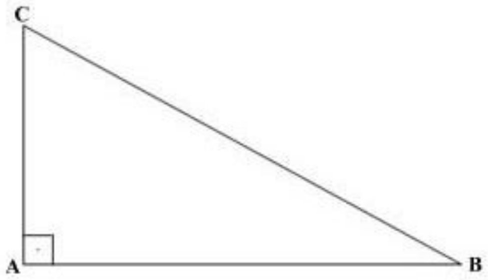
Exemplo: Determine o comprimento de um arco com ângulo central igual a 30° contido numa circunferência de raio 2 cm.

$$\ell = \frac{\alpha \times \pi \times r}{180} \rightarrow \ell = \frac{30 \times 3{,}14 \times 2}{180} \rightarrow \ell = 1{,}05\ cm$$

TRIÂNGULO RETÂNGULO

Definição: Temos um triângulo retângulo quando um dos três ângulos internos é reto. Na figura a seguir temos um ângulo reto em A.

$$H^2 = C_1^2 + C_2^2$$

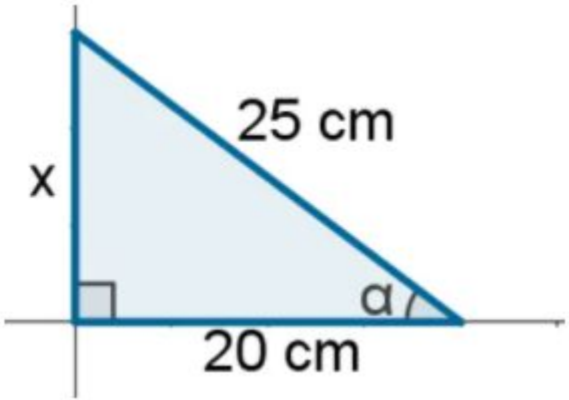


Sabe-se que o lado oposto ao ângulo reto, no caso lado BC, é a hipotenusa, e que os outros dois lados, AB e AC, são os catetos do triângulo ABC. Ainda em relação ao triângulo retângulo, temos o teorema de Pitágoras, que consiste na seguinte relação: a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

TRIÂNGULO RETÂNGULO

Exemplo: Qual é a medida do cateto oposto ao ângulo α no triângulo a seguir?

a) 10 cm
b) 15 cm
c) 20 cm
d) 25 cm
e) 30 cm



$$25^2 = x^2 + 20^2$$

$$x^2 = 25^2 - 20^2$$

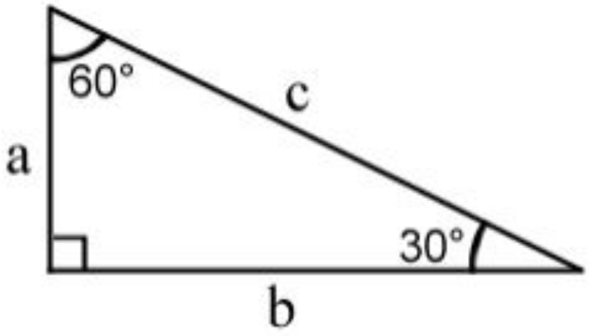
$$x^2 = 625 - 400$$

$$x^2 = 225$$

$$x = 15$$

TRIÂNGULO RETÂNGULO

Propriedades trigonométricas
Dado o exemplo a seguir:



Temos que, no triângulo retângulo, o seno de um ângulo é dado pela razão da medida do cateto oposto ao mesmo ângulo em relação à hipotenusa.

$$sen\ 30° = \frac{a}{c}$$

TRIÂNGULO RETÂNGULO

Já para o cosseno, temos a razão formada pela medida do cateto adjacente ao mesmo ângulo em relação à hipotenusa.

$$cos\ 30° = \frac{b}{c}$$

E a tangente é dada pela razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente.

$$tg\ 30° = \frac{a}{b}$$

A cotangente é a razão entre o cateto adjacente e o cateto oposto:

$$cotg\ 30° = \frac{b}{a}$$

TRIÂNGULO RETÂNGULO

A secante é a razão da hipotenusa pelo cateto adjacente:

$$sec\ 30° = \frac{c}{b}$$

A cossecante é a razão da hipotenusa pelo cateto oposto:

$$cossec\ 30° = \frac{c}{a}$$

Temos ainda, definida a partir do teorema de Pitágoras, a relação trigonométrica fundamental, representada por:

$$sen^2 x + cos^2 x = 1$$

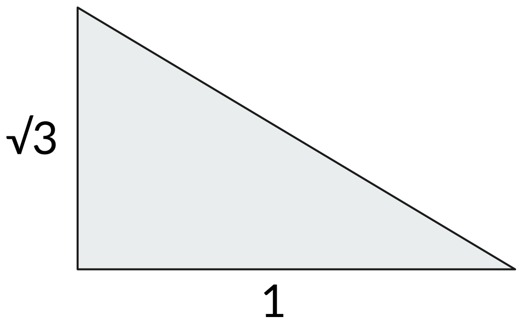
TRIÂNGULO RETÂNGULO

A seguir, os ângulos notáveis mais usuais:

	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

TRIÂNGULO RETÂNGULO

Exemplo: Determine os ângulos agudos de um triângulo retângulo de catetos que medem √3 cm e 1 cm.



$$tg\ a = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$tg\ a = \sqrt{3}$$

$$tg\ a = 60^\circ$$

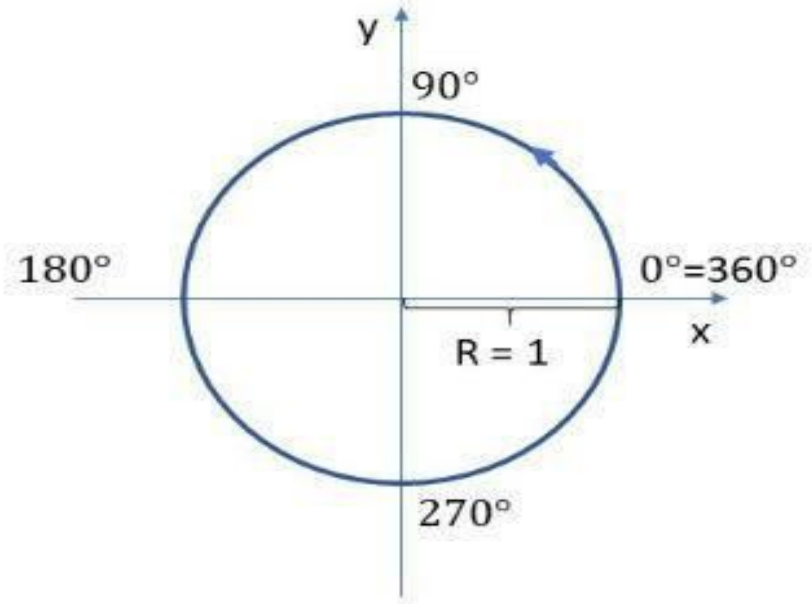
$$tg\ b = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$tg\ b = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

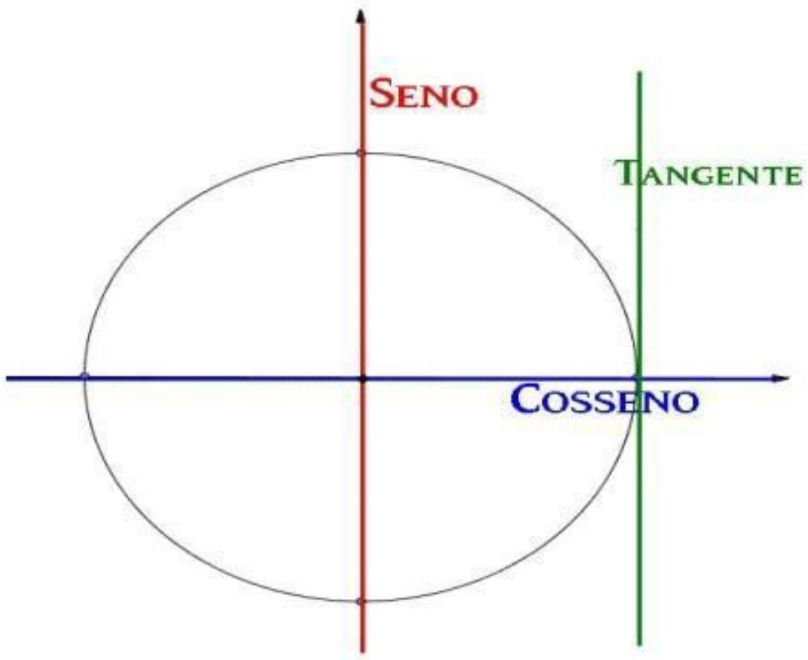
$$tg\ b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$b = 30^\circ$$

TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

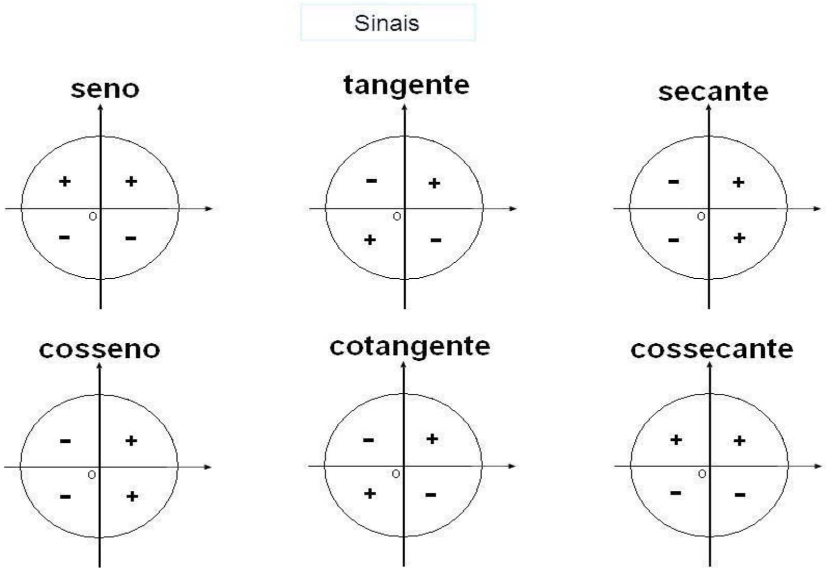


TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA



De acordo com os eixos como mostra na figura ao lado, podemos definir as retas seno, cosseno e tangente.

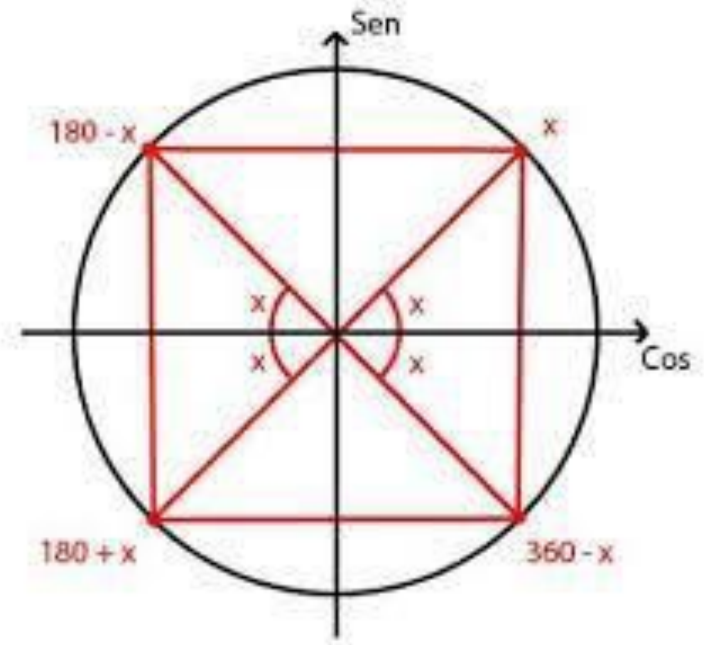
TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA



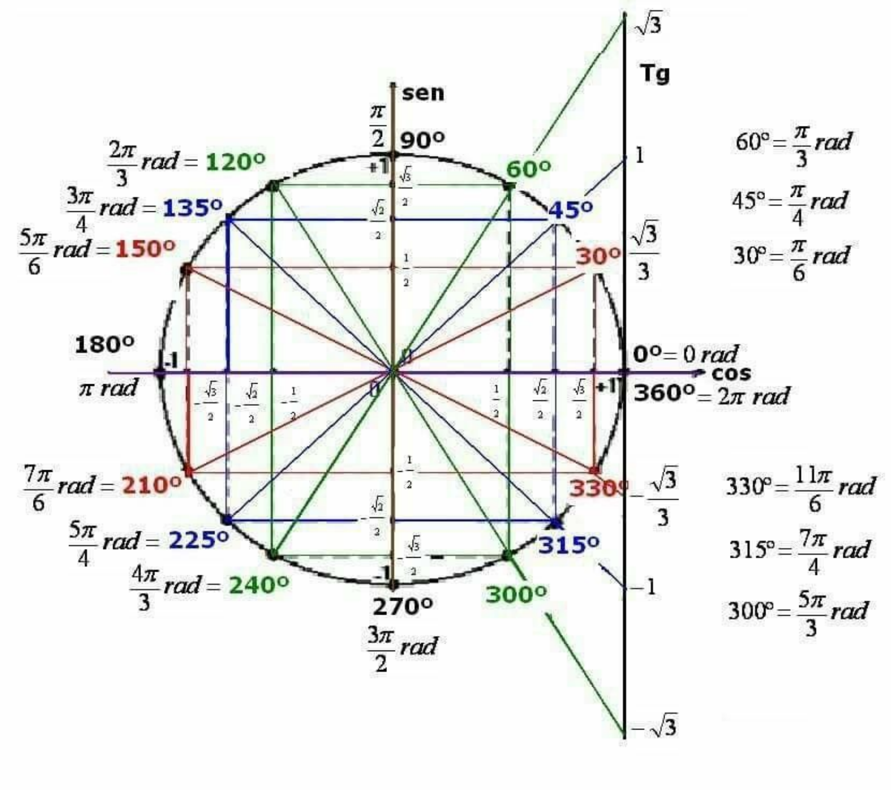
Análise dos sinais em cada quadrante do ciclo trigonométrico.

TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

Agora vamos observar os correspondentes a um ângulo x qualquer… Isso nós temos graças a simetria encontrada em nossa circunferência!



TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA



Acho melhor vermos isso se movimentando o que acham?

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

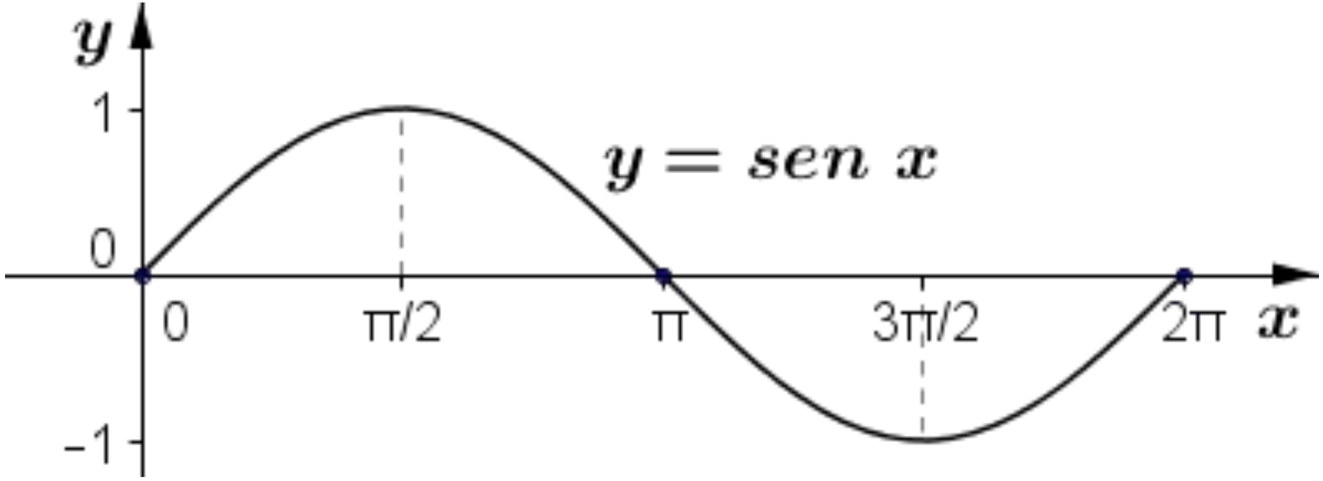
DEFINIÇÃO

- Conhecidas como funções circulares, estão relacionadas com as demais voltas do ciclo trigonométrico. Ela é periódica, ou seja, tem um comportamento periódico que ocorre em determinados intervalos de tempo. Assim o período corresponde ao menor intervalo de tempo em que acontece a repetição de determinado fenômeno.

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

FUNÇÃO SENO

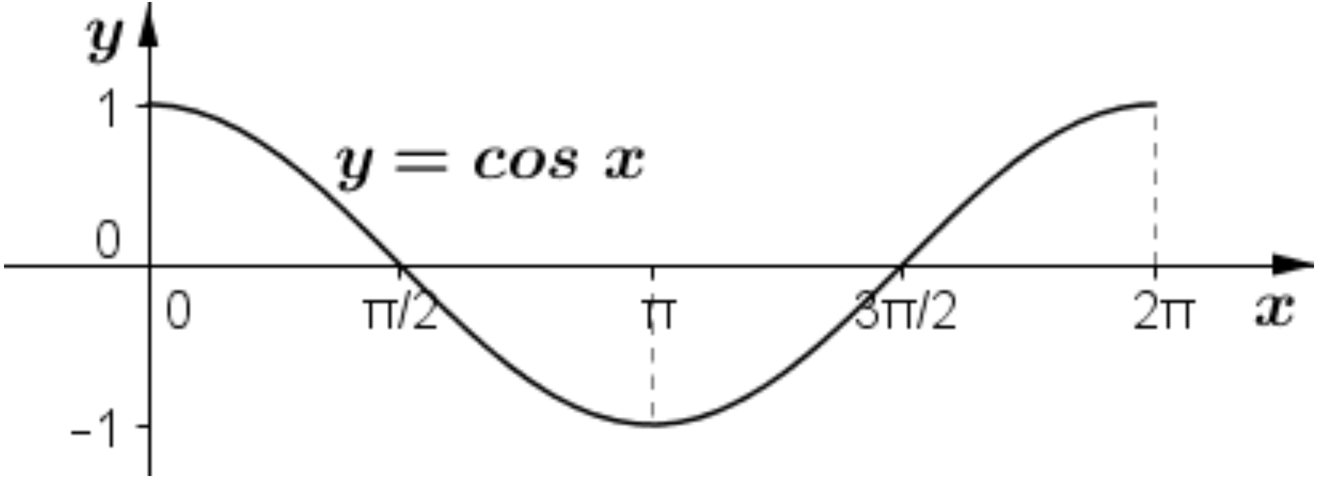
$$f(x) = sen(x)$$



FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

FUNÇÃO COSSENO

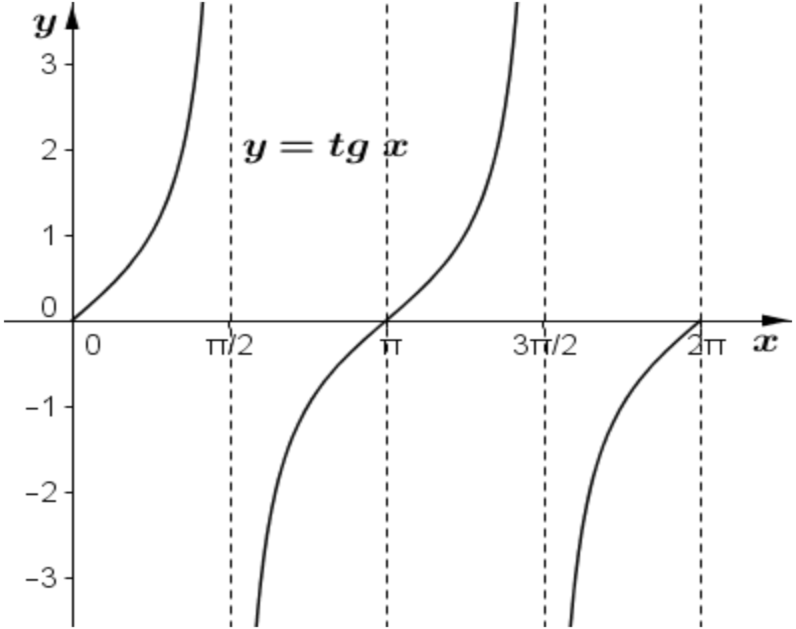
$$f(x) = \cos(x)$$



FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

FUNÇÃO TANGENTE

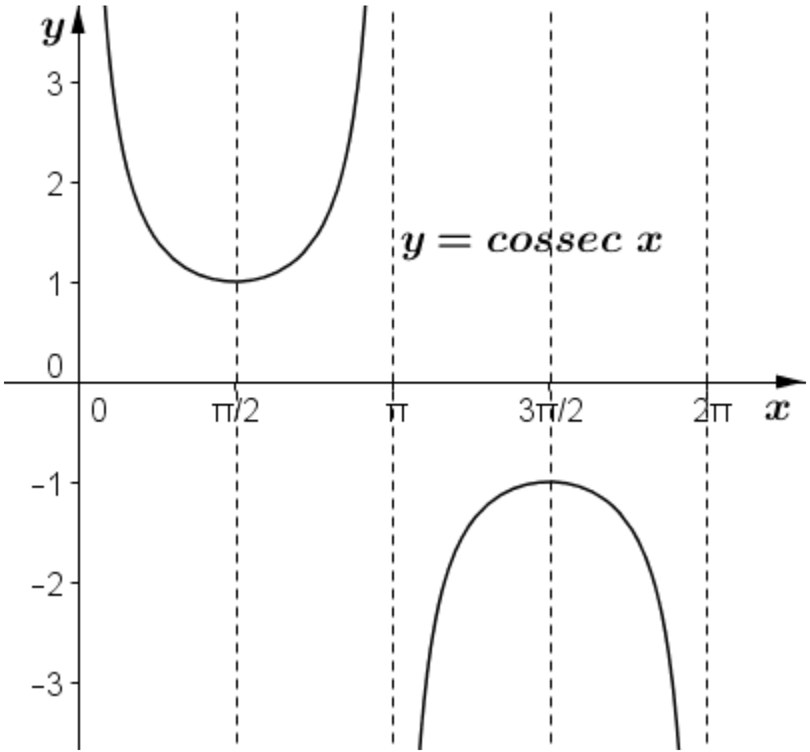
$f(x) = tg(x)$



FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

FUNÇÃO COSSECANTE

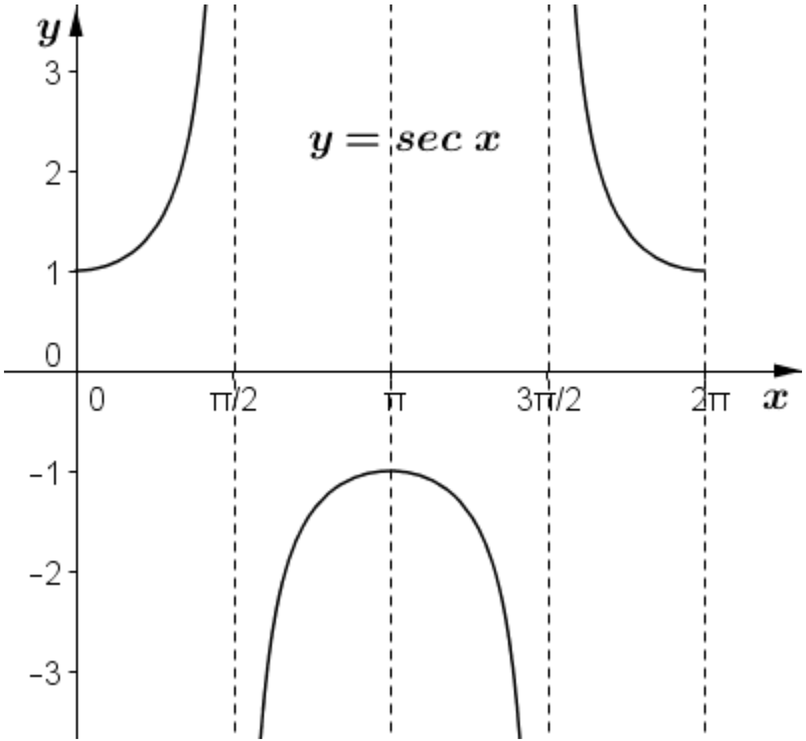
f(x) = cossec(x)



FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

FUNÇÃO SENO

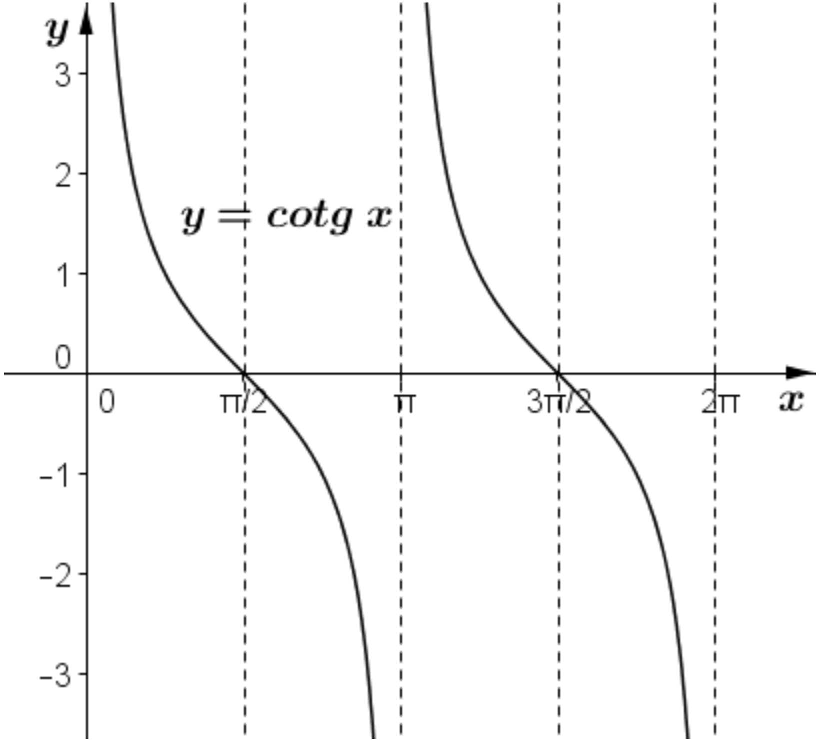
$$f(x) = \sec(x)$$



FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

FUNÇÃO SENO

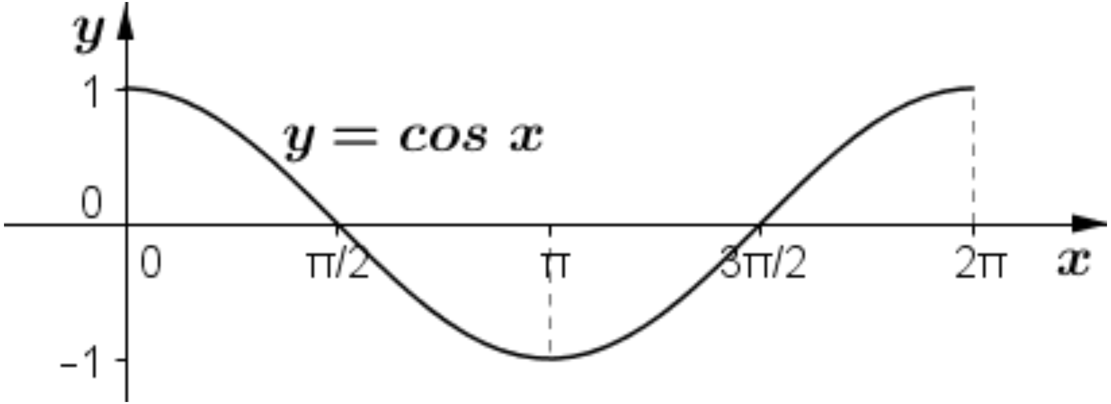
$f(x) = \text{cotg}(x)$



FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

EXEMPLO

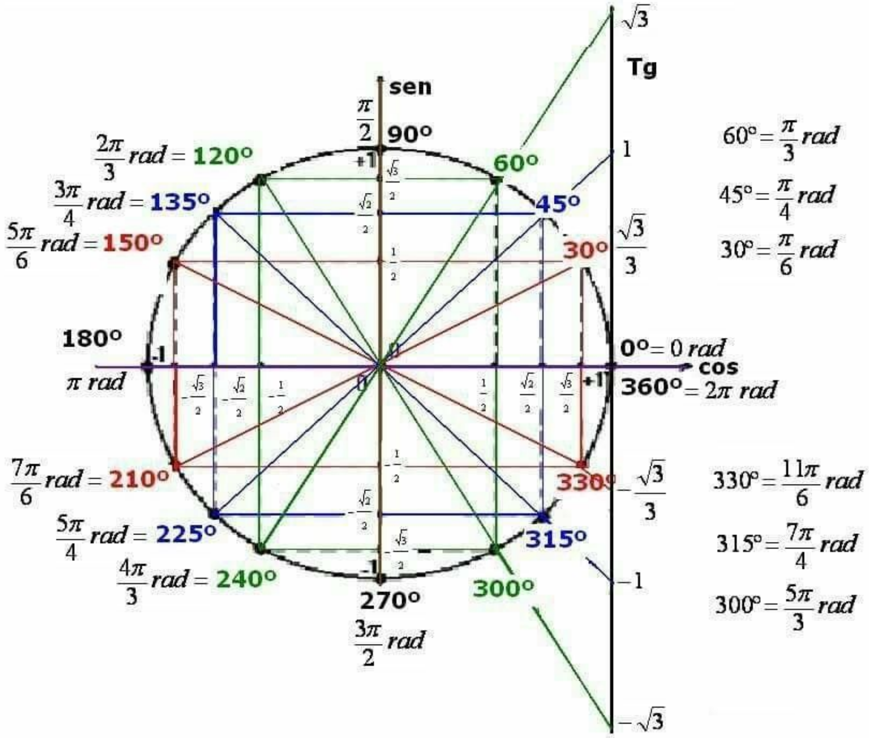
- Determine o Domínio, a Imagem e o Período da função h(x)=cos(x)



FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

RESOLUÇÃO

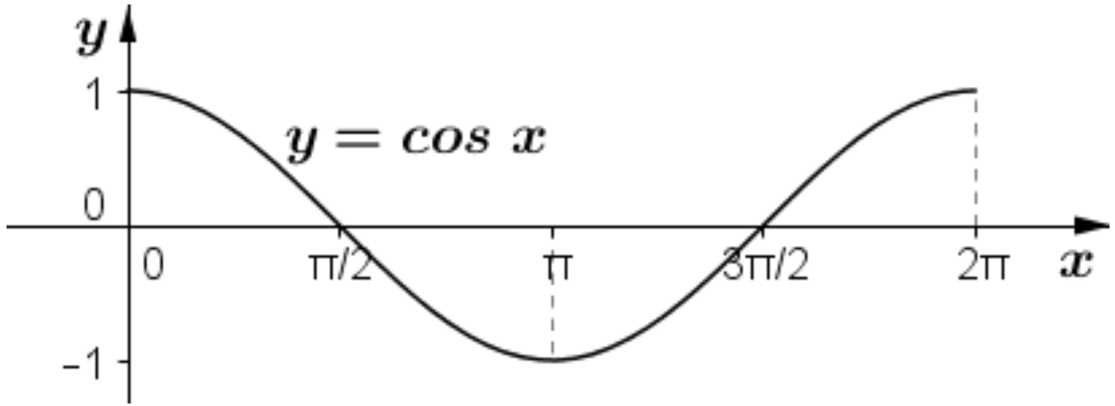
- Analisando o ciclo trigonométrico vemos que:



FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

RESOLUÇÃO

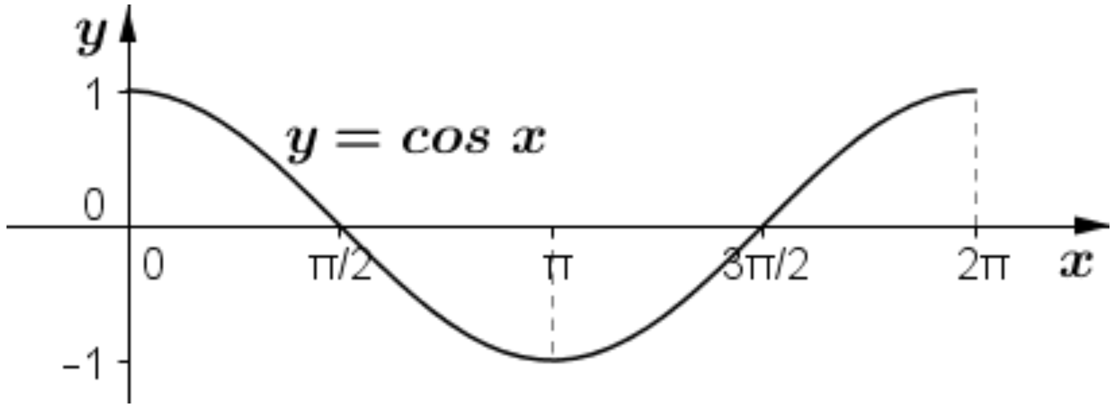
- Assim temos que o Domínio da função h(x)=cos(x) é todo o conjunto dos números Reais .



FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

RESOLUÇÃO

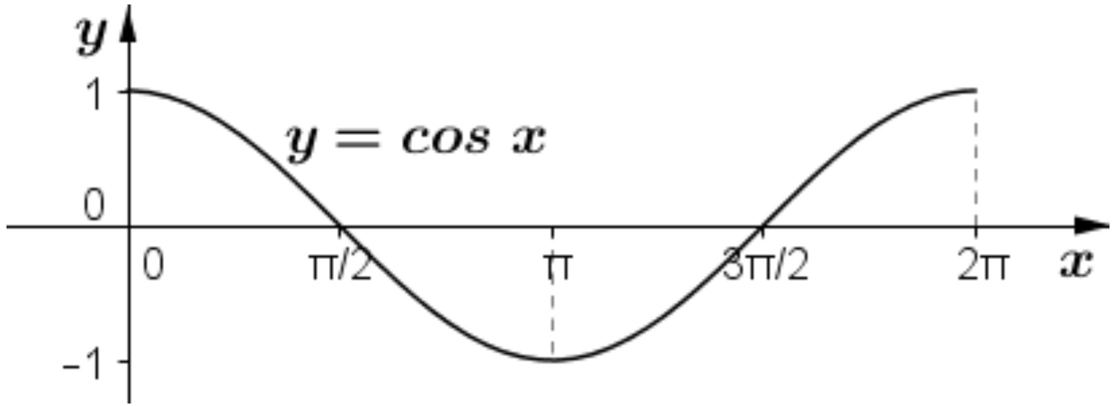
- A imagem está no intervalo de [-1,1] .



FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

RESOLUÇÃO

- E o período da função é de 2pi.



FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

EXERCÍCIO (ASSÍNCRONO)

- Determine o Domínio, a Imagem e o Período da função $f(x)=3sen(4x)$.

Utilizar operações com arcos duplos para a resolução deste exercício.

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

EXERCÍCIO

- Determine o Domínio, a Imagem e o Período da função $f(x) = tg(x)$

OPERAÇÕES COM ARCOS E ARCOS DUPLOS

Como podemos calcular o seno de um ângulo sem a tabela completa das funções trigonométricas?

Exemplo: sen (80°)

sen(30°+50°) = sen30° + sen50 °???

Arcos duplos são relações trigonométricas utilizadas pra calcular um arco

que multiplicado por dois, ou seja, foi dobrado. Mas ao se dobrar o arco, não

podemos apenas dobrar as funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente), e

por isso temos algumas fórmulas para realizar esse cálculo.

OPERAÇÕES COM ARCOS E ARCOS DUPLOS

Para o seno, quando é necessário saber a adição, subtração de dois arcos,

“a” e “b”, e o arco duplo se usa as seguintes fórmulas:

$$sen\,(a + b) = sen\,a\,.\cos b + \cos a\,.sen\,b$$

$$sen\,(a - b) = sen\,a\,.\cos b - \cos a\,.sen\,b$$

$$sen\,2a = 2\,.sen\,a\,.\cos a$$

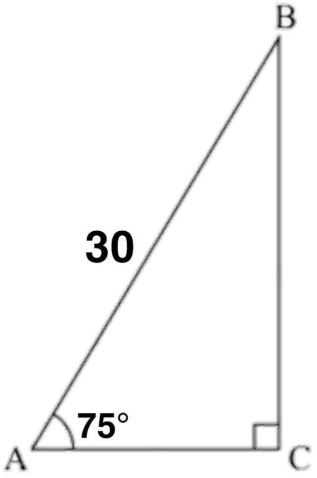
OPERAÇÕES COM ARCOS E ARCOS DUPLOS

Exercícios

1)A distância entre o topo do prédio e a ponta de sua sombra é de 30m e o angulo entre a ponta da sombra e o topo do prédio é de 75 graus. Calcule a altura do prédio.

2)(Assíncrono) Calcule o seno de 105°.

OPERAÇÕES COM ARCOS E ARCOS DUPLOS



$sen(75)=co/30$

$sen(75)=sen(30+45)=sen(30)cos(45)+sen(45)cos(30)$

$sen(30)cos(45)+sen(45)cos(30)=co/30$

OPERAÇÕES COM ARCOS E ARCOS DUPLOS

Para o cosseno, temos

$$cos\ (a + b) = cos\ a \,.\, cos\ b - sen\ a \,.\, sen\ b$$

$$cos\ (a - b) = cos\ a \,.\, cos\ b + sen\ a \,.\, sen\ b$$

$$cos\ 2a = 2\,cos^2 a - 1 \ ou\ cos\ 2a = 1 - sen^2\ a$$

OPERAÇÕES COM ARCOS E ARCOS DUPLOS

Exercícios

1)Calcule o cosseno de 15°.

2)(Assíncrono) Calcule o cosseno de 120°.

Dica 1: cos(45-30)
cos(45)..cos(30)+sen((45).sen(30)

OPERAÇÕES COM ARCOS E ARCOS DUPLOS

Para a tangente:

$$tg\,(a+b) = \frac{tg\,a + tg\,b}{1 - tg\,a\,.\,tg\,b}$$

$$tg\,(a-b) = \frac{tg\,a - tg\,b}{1 + tg\,a\,.\,tg\,b}$$

$$tg\,2a = \frac{2\,.\,tg\,a}{1 - tg^2 a}$$

OPERAÇÕES COM ARCOS E ARCOS DUPLOS

Exercícios

1)Calcule a tangente de 15°.

2)(Assíncrono) Calcule a tangente de 105°.

Dica 1: tg(15)=tg(60-45)

OPERAÇÕES COM ARCOS E ARCOS DUPLOS

E para a cotangente:

$$cotg\,(a+b) = \frac{cotg\,a\,.\,cotg\,b - 1}{cotg\,a + cotg\,b}$$

$$cotg\,(a-b) = \frac{cotg\,a\,.\,cotg\,b + 1}{cotg\,b - cotg\,a}$$

$$cotg\,2a = \frac{cotg^2 a - 1}{2\,.\,cotg\,a}$$

REFERÊNCIAS

Brainly: https://brainly.com.br/tarefa/29302650.

Educa Mais Brasil: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/angulos.

Escola Kids: https://escolakids.uol.com.br/matematica/angulo.htm.

Infoescola: https://www.infoescola.com/matematica/angulos/.

Kuadro: https://www.kuadro.com.br/resumos-enem-vestibulares/matematica/.

Matika: https://matika.com.br/radianos/definicao-do-radiano.

Toda Matéria: https://www.todamateria.com.br/angulos/.

Toda Matéria: https://www.todamateria.com.br/triangulo-retangulo/.

REFERÊNCIAS

Brasil Escola: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/.

Calcular e Converter: https://calculareconverter.com.br/seno-cosseno-e-tangente/.

Prepara Enem: https://www.preparaenem.com/matematica/.